Exercices école ouverte

1 Dénombrement

Exercice 1 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées.

   Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.

   Combien ont-ils de menus possibles ?

Exercice 2 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.
Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. Au moins une boule blanche a été tirée.
2. Une boule noire au plus a été tirée.
3. Trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans et ordre.
4. Deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées.

Exercice 3 Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

1. Au moins un atout est un multiple de cinq ?
2. Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 4 De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

2 Probabilités

Exercice 1 On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice 2 Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches.
Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.
Quelle est la probabilité de gagner pour chaque personne ?

Exercice 3 Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Le numéro composé commence par 01.
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.
3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.
4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.
5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

Exercice 4 Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement et sans remise 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

3 Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0

2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$

3. $\ln(\cos(x))$ en 0

4. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ en $+\infty$

Exercice 2 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+e^{-2n}+\sqrt{n^5}}{\ln(2n)+2n-3}$ 2. $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$ 3. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$

4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$ 5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 3 Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 .
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0 .
3. $f(x) = 2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

4 Applications linéaires

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (2y-2z, x+y-2z, x-y)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$ où a est un nombre complexe fixé et $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 3 on note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\,z + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\,\overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer l'image et le noyau de f, ainsi que leurs dimensions.

Exercice 4 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que ker (φ) est une droite vectorielle dont on précisera une base.
   L'endomorphisme φ est-il injectif ?
3. Montrer que Im (φ) =Vect$(1, X)$.
4. Montrer que ker $(\varphi) \oplus$ Im $(\varphi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur ker (φ) de parallèlement à Im (φ).
   Déterminer $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$.

Exercice 5 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces vectoriels $F =$ Vect $((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z); 2x + y - z = 0\}$.

1. Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G.
3. Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 6 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2x + y + z}{3}, \frac{x + 2y - z}{3}, \frac{x - y + 2z}{3} \right)$$

Démontrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).