Fiche de révisions

1 Dénombrement

E et F sont des ensembles finis.

1) **Cardinal d'une union disjointe** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) =$$

2) **Cardinal d'un produit cartésien** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors
$\operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_n) =$

3) **Modèle de tirages successifs dans des urnes différentes :** Si on tire successivement un élément dans l'urne E_1 contenant n_1 éléments, un élément dans E_2 à n_2 éléments, ..., un élément dans E_p à n_p éléments, alors il y a $\cdots\cdots\cdots$ tirages possibles .

4) **Modèle de tirages successifs avec remise dans une urne :** Effectuer p tirages **successifs** avec **remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir $\cdots\cdots\cdots$ d'éléments de cette urne. Il y a donc $\cdots\cdots\cdots$ façons de le faire. L'**ordre** intervient et il peut y avoir **répétition** d'un élément.

5) **Nombre d'applications** F^E est fini et $\operatorname{Card}\left(F^E\right) =$.

6) **Nombre de parties d'un ensemble** $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\operatorname{Card}(\mathscr{P}(E)) =$.

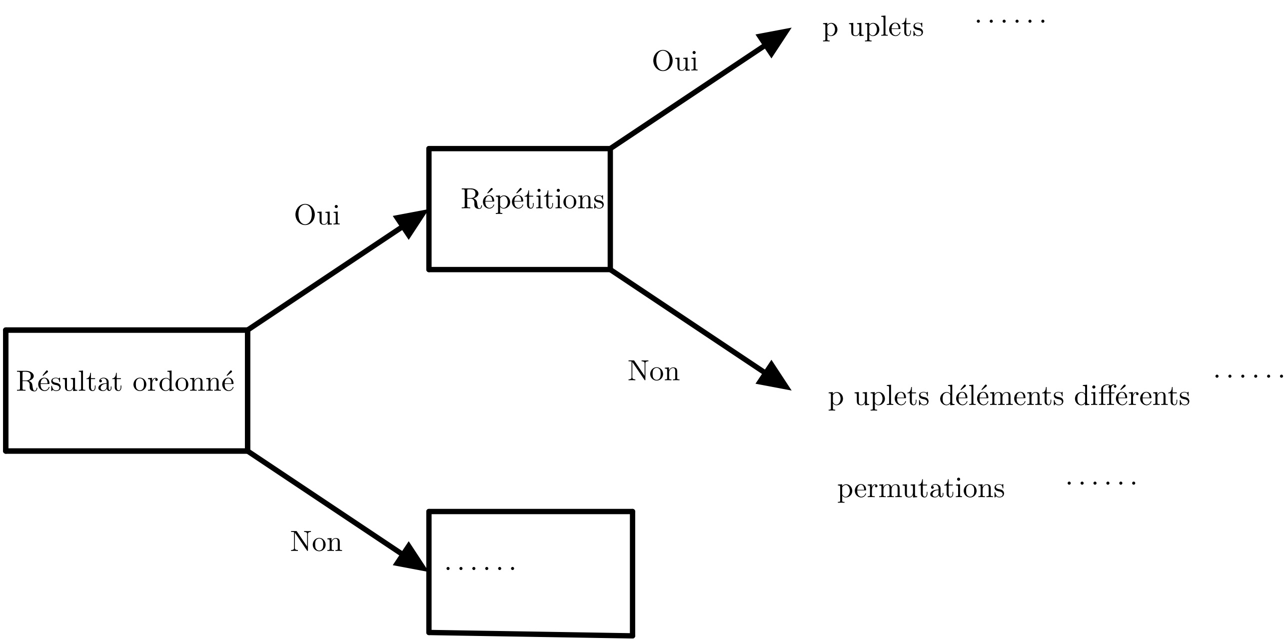
7) **Modèle de tirages successifs sans remise dans une urne :** Effectuer p tirages **successifs** et **sans remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir $\cdots\cdots\cdots$ d'éléments de cette urne. Il y a donc $\cdots\cdots\cdots$ façons de le faire. Dans ce cas, l'**ordre** intervient et il n'y a **pas de répétition** d'un élément.

8) **Nombre d'applications injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est

9) **Nombre de permutations ou nombre de bijections** Le nombre de n-listes sans répétition de E est

10) **Modèle de tirage simultané dans une urne :** Tirer **simultanément** p éléments dans une urne qui contient n éléments, c'est choisir $\cdots\cdots\cdots$ d'éléments de cette urne.
Il y a donc$\cdots\cdots\cdots$ façons de le faire. Dans ce cas, il n'y a **ni ordre, ni répétition**.

11) **Schéma récapitulatif**



2 Probabilités

1) **Probabilité conditionnelle** d'un événement B sachant A : $\mathrm{P}_A(B) =$

2) **Formule des probabilités composées** Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) =$$

3) **Formule des probabilités totales** Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors, pour tout événement B,

$$\mathrm{P}(B) =$$

4) **Formule de Bayes** Si $(A_1, \ldots, A_k)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles alors, pour tout événement B de probabilité non nulle,

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \quad \mathrm{P}_B(A_j) =$$

Cas particulier : Si A et B sont de probabilités non nulles alors

$$\mathrm{P}_B(A) =$$

5) On dit que A et B sont **indépendants** pour la probabilité P si $\mathrm{P}(A \cap B) =$.

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_A(B) = \cdots \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_B(A) = \cdots \ .$$

6) Soit $(A_1, \dots, A_k)$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \dots, A_k)$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si, pour toute partie I de $[\![1, k]\!]$,

3 Analyse asymptotique

1) f est **dominée** par g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ si

2) f est **négligeable** devant g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$ si

3) f est **équivalente** à g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si

4) **Équivalents usuels** $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$ $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$ $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$

$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$ $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$ $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$ $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \cdots$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.

5) **Compatibilité avec les opérations**

L'équivalence est compatible avec

6) **Formule de Taylor-Young** Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors

7) **Application : DL usuels en 0**

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=}$

$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=}$

$\operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{=}$

$\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{=}$

$\cos x \underset{x \to 0}{=}$

$\sin x \underset{x \to 0}{=}$

$(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=}$

8) **DL en** a On pose

9) **DL et équivalents** Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ et $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim}$

10) **DL, tangente et position** Si $f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$,

alors

11) **DL, asymptote et position** Si $tf\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} a_0 + a_1 t + a_p t^p + o(t^p)$ avec $a_p \neq 0$,

alors on peut écrire $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=}$

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation

4 Applications linéaires

E et F sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels

Si dim $E < \infty$ on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

1)$f : E \to F$ est dite **linéaire** si

Dans toute la suite on considère $f \in \mathscr{L}(E, F)$

2) Ker $f =$

3) Im $f =$

Si dim $E < \infty$, Im $f =$

4) **Théorème du rang** :

5) f est **injective** ssi

Si dim $E < \infty$, f est injective ssi

6) f est **surjective** ssi

Si dim $E < \infty$, f est surjective ssi

7) f est **bijective** ssi

Si dim $E < \infty$, f est un isomorphisme de E sur F ssi

8) Si dim $E =$ dim F alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

9) **Conditions nécessaires en dimension finie**

- Si dim $E >$ dim F alors f ne peut être $\cdots\cdots$.
- Si dim $E <$ dim F alors f ne peut être $\cdots\cdots$.
- Si dim $E \neq$ dim F alors f ne peut être $\cdots\cdots$.

10) f est un **endomorphisme** si

11) f est un **isomorphisme** si

12) f est un **automorphisme** si

Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

13) **Projecteur** sur F parallèlement à G $\quad p$:

14) $\cdots\cdots$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

15) **Caractérisation des projecteurs** $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur ssi

Dans ce cas, $E = \cdots\cdots \oplus \cdots\cdots$ et p est le projecteur sur $\cdots\cdots$ parallèlement à $\cdots\cdots$.

16) **Symétrie** par rapport à F parallèlement à G $\quad s$:.

17) $\cdots$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

18) $p = \cdots\cdots$ est le projecteur sur F parallèlement à G ssi $s = \cdots\cdots$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

19) **Caractérisation des symétries** $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie ssi

Dans ce cas $E = \cdots\cdots \oplus \cdots\cdots$ et s est la symétrie par rapport à $F = \cdots\cdots$ parallèlement à $G = \cdots\cdots$.