Correction des exercices école ouverte

1 Dénombrement

Exercice 1 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert.

   On peut constituer $4 \times 3 \times 5 = 60$ menus différents.

2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées.

   Il a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 = 18$ possibilités pour constituer son menu s'il prend deux entrées différentes.

   S'il choisit aussi de manger deux fois la même entrée, il faut ajouter les 4 possibilités de prendre deux entrées identiques ce qui donne $4 \times 3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 = 30$ menus possibles.

3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.

   Ils ont $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ menus possibles.

Exercice 2 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.
Il y a au total $13^4 = 28\,561$ tirages possibles .

1. Au moins une boule blanche a été tirée.

   On utilise le complémentaire : Aucune boule blanche n'a été tirée, autrement dit 4 boules noires ont été tirées ce qui fait 8^4 possibilités.

   Donc il y a $13^4 - 8^4 = 24\,465$ tirages avec au moins une boule blanche.

2. Une boule noire au plus a été tirée.

   0 boule noire : 5^4

   1 boule noire exactement : $5^3 \times 8 \times 4$

   Donc il y a $5^4 + 5^3 \times 8 \times 4 = 4\,625$ tirages avec au plus une boule noire.

3. $8^3 \times 5 = 2\,560$ tirages comportent trois boules noires et une boule blanche dans et ordre.

4. $8^2 \times 5^2 \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 9\,600$ tirages comportent deux boules noires et deux boules blanches.

Exercice 3 Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard.
Il y a au total $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages possibles.

1. Au moins un atout est un multiple de cinq ?

   Il y a 4 atouts multiples de 5, donc 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, et $\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc
   $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
2. Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?

   Il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents.

   Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, 3 atouts multiples de 5 sans le 15 et 6 atouts multiples de 3 sans le 15 on a
   $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \times 6 \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ tirages possibles.
3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

   Ni le 1, ni le 21 : $\begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Par passage au complémentaire, il reste donc
   $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec le 1 ou le 21.

Exercice 4 De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

• s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.

• s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.

• s'il y a trois ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 = 8$ classements car il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).

• s'il y a deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3! = 36$

• s'il y a deux fois deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ classements cil suffit de choisir les deux ex æquo de la première place.

Il y a donc au total 75 classements possibles.

2 Probabilités

Exercice 1 On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :
$\Omega = \{(1,1,1,1);(1,1,1,2);\cdots;(6,6,6,6)\}$. On a Card $\Omega = 6^4 = 1\,296$.

1. On obtient quatre fois le même chiffre.

   Il y a six cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{6^3}$

2. On obtient quatre chiffres différents.

   Attention : il ne s'agit pas du complémentaire de la question précédente.

   il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{360}{6^4} = \dfrac{5}{18}$
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

   Liste des combinaisons possibles

   $(1, 2, 3, 4); (2, 3, 4, 5); (3, 4, 5, 6)$ en croissant et le même nombre de cas en décroissant donc 6 cas favorables et la même probabilité qu'à la première question.

Exercice 2 Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches.
Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné.

Une représentation sous forme d'arbre ou la formule des probabilités composées, permet d'obtenir les valeurs souhaitées.

La probabilité que le premier joueur gagne vaut $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Pour le deuxième, il faut que le joueur 1 tire une boule noire, puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité de $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$

De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$

le quatrième avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$

le dernier joueur gagne avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{15}$

Remarque La somme de ces cinq probabilités vaut 1, ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'avec des tirages sans remise, l'un des cinq joueurs va nécessairement tirer une boule blanche.

Exercice 3 Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :
Il y a 10^6 numéros de téléphones au total.

1. Le numéro composé commence par 01.

   Il y a 10^4 numéros commençant par 01 donc une probabilité de $\dfrac{10^4}{10^6} = \dfrac{1}{100}$
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.

   2. On a $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ numéros possibles, soit une probabilité de
   $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^6} = \dfrac{27 \times 7}{2 \times 5^4}$
3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.

   Il ne faut pas oublier de tenir compte de la position des deux 5 : il y a
   $10^4 \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \times 10^4$ numéros possibles, soit une probabilité de $\dfrac{15 \times 10^4}{10^6} = \dfrac{3}{20}$

4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.

   5^6 possibilités et une probabilité de $\dfrac{5^6}{10^6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

   Il suffit de choisir les six chiffres apparaissant dans le numéro pour connaitre le numéro (puisque l'ordre sera alors imposé), ce qui donne $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = 210$ numéros possibles, et une probabilité de $\dfrac{210}{10^6} = \dfrac{21}{10^5}$

Exercice 4 Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement et sans remise 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :
Il y ici deux univers possibles pour les résultats.
Si on ne tient pas compte de l'ordre, Card $\Omega = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$.
mais si on en tient compte Card $\Omega = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = \dfrac{25!}{(25-5)!}$.

1. On obtient 5 boules vertes.

   1. Il y a $\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}}$

2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.

   Ici l'ordre intervient. D'après la formule des probabilités composées, la probabilité vaut $\dfrac{15}{25} \times \dfrac{10}{24} \times \dfrac{9}{23} \times \dfrac{14}{22} \times \dfrac{13}{21} = \dfrac{39}{1012}$

3. On obtient au plus une boule blanche.

   Soit on tire cinq boules vertes, soit quatre boules vertes et d'une boule blanche (union disjointe), donc la probabilité vaut $\dfrac{\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} \times 10}{\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}}$

4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

   De la même façon que précédemment, la probabilité vaut $\dfrac{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}}$

   Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise :

   Dans le cas des tirages avec remise, Card $\Omega = 25^5$.

   1. Il y a 15^5 tirages favorables, donc une probabilité de $\dfrac{15^5}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5$

2. Il y a $15 \times 10 \times 10 \times 15 \times 15$ tirages favorables, donc une probabilité de
$\dfrac{15^3 \times 10^2}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$
3. Soit on obtient cinq vertes (15^5 cas), soit quatre vertes et une blanche, ce qui correspond à $15^4 \times 10 \times 5$ cas (il ne faut pas oublier de multiplier par 5 pour tenir compte du choix de la position de la boule blanche), donc une probabilité de
$\dfrac{15^5 + 15^4 \times 10 \times 5}{25^5}$

4.La probabilité vaut $\dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times 15^3 \times 10^2}{25^5}$ en comptant le choix de la position des deux blanches.

3 Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{5}{6}}$

3. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$

4. $\sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} = \dfrac{1}{2} n^{\frac{3}{2}}$ car $\ln(2n) \underset{n\to+\infty}{=} o(2n)$
$n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}})$ et $e^{-2n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}})$

2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-(n+1)}$

3. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n^2+1} = \dfrac{\ln(n^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{n^2}$

4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2+2-1}{n^2+2}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$

5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{2\sqrt{n^2}} = 1$

Exercice 3

1. $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :
   $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ en 0 avec $u = x + x^2, u^2 = x^2 + o(x^2)$
   $\ln(1+x+x^2) = x + x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

   La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = x$, et le terme suivant du développement limité étant toujours positif au voisinage de 0, la courbe sera située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{e^x-1} &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \end{aligned}$$

   en appliquant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ en 0 avec $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2), u^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

   La courbe admet une tangente d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ et elle est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0 car $\frac{x^2}{12} \geqslant 0$ pour tout x.

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$. Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} tf\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{2t}{\sqrt{t}} - t\sqrt{\frac{1}{t}+1} - t\sqrt{\frac{1}{t}-1} \\ &= 2\sqrt{t} - \sqrt{t}\sqrt{1+t} - \sqrt{t}\sqrt{1-t} \\ &\underset{t\to+0}{=} \sqrt{t}\left[2 - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) - \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2)\right] \\ &= \frac{t^2\sqrt{t}}{4} + o(t^2\sqrt{t}) \end{aligned}$$

   D'où $\frac{1}{x}f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{4x^2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

   La admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$ et elle est située au-dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car $\frac{1}{2x\sqrt{x}} \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

4. $f(x)=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$. Pour tout $t>0$

$$\begin{aligned}
t\,f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t} &\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{2+t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{6}+o(t^3)}\\
&\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^3}{12}+o(t^3)}\\
&\underset{t\to+0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{4}-\frac{t^3}{8}+o(t^3)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^3}{24}+o(t^3)\right)
\end{aligned}$$

en appliquant $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)$ en 0 avec

$u=\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^3}{12}+o(t^3), u^2=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{2t^3}{8}+o(t^3)=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^3}{4}+o(t^3), u^3=\dfrac{t^3}{8}+o(t^3)$

Donc $\dfrac{1}{x}f(x)\underset{x\to+\infty}{=}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{48x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ et $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{48x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ en $+\infty$ et elle est située au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\dfrac{1}{48x^2}\geqslant 0$ pour tout x.

5. $f(x)=x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$. Pour tout $t>0$

$$\begin{aligned}
tf\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t}\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)\\
\frac{t}{1+t} &= \underset{t\to+0}{=} t(1-t+t^2+o(t^2)) = t-t^2+t^3+o(t^3)
\end{aligned}$$

En utilisant $\arctan u = u-\dfrac{u^3}{3}+o(u^3)$ avec $u=t-t^2+t^3+o(t^3), u^3=t^3+o(t^3)$ on a

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right)\underset{t\to+0}{=} t-t^2+t^3-\frac{t^3}{3}+o(t^3)=t-t^2+\frac{2t^3}{3}+o(t^3)$$

puis $\quad \dfrac{1}{x}f(x)=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et enfin

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=} x-1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y=x-1$, et elle est située au-dessus cette l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\dfrac{2}{3x}\geqslant 0$ pour tout $x>0$.

4 Applications linéaires

Exercice 1 On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2y - 2z, x + y - 2z, x - y)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. $f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z$ donc $\ker f = \text{Vect }((1, 1, 1))$.
   $f(1, 0, 0) = (0, 1, 1) = u_1 \quad f(0, 1, 0) = (2, 1, -1) = u_2 \quad f(0, 0, 1) = (-2, -2, 0) = u_3$
   Or $u_1 + u_3 = -u_2$ donc $\text{Im } f = \text{Vect }(u_1, u_3) = \text{Vect }((0, 1, 1); (1, 1, 0))$
   f n'est donc pas injective ni surjective et a fortiori, f n'est pas bijective.
3. $u \in \ker f \cap \text{ Im } f \Leftrightarrow u = (x, x, x) = a(0, 1, 1) + b(1, 1, 0) = (b, a + b, a) \Leftrightarrow x = a = b = 0$, donc $\ker f \cap \text{ Im } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
   De plus, d'après le théorème du rang, $\text{rg } f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont bien supplémentaires.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$ où a est un nombre complexe fixé et $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(z + \lambda z') = z + \lambda z' + a\overline{(z + \lambda z')} = z + a\overline{z} + \lambda z' + a\lambda\overline{z'} = f(z) + \lambda f(z')$.
   donc f est linéaire.
2. $f(z) = 0 \Leftrightarrow z + a\overline{z} = 0$. En notant
   $z = x + \mathrm{i}y, a = b + \mathrm{i}c, f(z) = x + \mathrm{i}y + (b + \mathrm{i}c)(x - \mathrm{i}y) = x + bx + cy + \mathrm{i}(y + cx - by)$
   $f(z) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (1 + b)x + cy & = & 0 \\ cx + (1 - b)y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où
   $A = \begin{pmatrix} (1 + b) & c \\ c & (1 - b) \end{pmatrix}$
   • Si $\det A \neq 0$ alors la matrice A est inversible et la seule solution de ce système est le vecteur nul. Or $\det A = 1 - b^2 - c^2 = 1 - |a|^2$
   Donc, Si a n'est pas de module 1, $\ker f = \{0\}$ et l'application est injective.
   f est alors bijective car c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
   • Si $|a| = 1$ alors $b^2 + c^2 = 1$ et $(1 + b)x = -cy \Leftrightarrow cx = -\dfrac{c^2}{1 + b}y$ à condition que $b \neq -1$ i.e $a \neq -1$
   On obtient alors $cx = \dfrac{b^2 - 1}{1 + b}y = (b - 1)y$ et la deuxième équation est vérifiée.
   Donc $\ker f = \text{Vect } \left(-\dfrac{c}{1 + b} + \mathrm{i} \right)$
   Dans le cas particulier où $a = -1$, le système se résume à $2y = 0$ et $\ker f = \mathbb{R}$.
   Si $|a| = 1$ f n'est alors pas injective et une CNS pour que f soit bijective est $|a| \neq 1$

Exercice 3 on note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$

1. $f(z) \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(z+\lambda z') = \dfrac{1}{2}(z+\lambda z') + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{(z+\lambda z')} =$ $\dfrac{1}{2}z + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z} + \lambda\left(\dfrac{1}{2}z' + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z'}\right) = f(z) + \lambda f(z')$.
   Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. $f^2(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}z + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}\right) + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overline{z} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}z\right) = f(z)$ donc f est un projecteur.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = \dfrac{x+y}{2} + \mathrm{i}\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{x+y}{2}(1+\mathrm{i})$ et $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}\ (1+\mathrm{i})$
   $f(z) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ donc $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\ (1-\mathrm{i})$

Exercice 4 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$

1. Si $P \in E$, on sait que $\deg\ (P) \leqslant 2$, donc $\deg\ (P') \leqslant 1$, et $\deg\ ((X-1)P') \leqslant 2$.
   Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   On démontre que φ est linéaire (à faire) et φ est bien un endomorphisme de E.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors $\varphi(P) = 2aX^2 + 2bX + 2c - (X-1)(2aX+b) =$ $2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX2 + 2aX - bX + b = (b+2a)X + 2c + b$.
   $\varphi(p) = 0 \Leftrightarrow b + 2a = 2c + b = 0$, soit $c = a = -\dfrac{b}{2}$
   On en déduit que $\ker(\ \varphi) = \mathrm{Vect}\ (X^2 - 2X + 1)$ et $\mathrm{Ker}\ (\varphi)$ est une droite vectorielle.
   φ n'est pas injective puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
3. On peut calculer les images des polynômes de la base canoniques :
   $\varphi(1) = 2, \varphi(X) = 2X - (X-1) = X + 1$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X$.
   On peut alors dire que $\mathrm{Im}\ (\varphi) = \mathrm{Vect}\ (2, X+1, 2X) = \mathrm{Vect}\ (2, 2X) = \mathrm{Vect}\ (1, X)$.
4. $\ker\ (\varphi) \cap \mathrm{Im}\ (\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_[X]}\}$ car les polynômes de l'image sont tous de degré inférieur ou égal à 1, alors que ceux du noyau (hormis le polynôme nul) sont de degré 2. Puisque les dimensions respectives du noyau et de l'image sont de 1 et de 2, et que $\dim\ (E) = 3$, cela suffit à prouver que $\ker\ (\varphi)$ et $\mathrm{Im}\ (\varphi)$ sont bien supplémentaires.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker\ (\varphi)$ de parallèlement à $\mathrm{Im}\ (\varphi)$.
   $\varphi \circ p = 0$ car p est la projection sur $\ker\ (\varphi)$, $p(P) \in \ker\ (\varphi), \forall P \in E$
   $p \circ \varphi = 0$ car la projection p est parallèlement à $\mathrm{Im}\ (\varphi)$ donc $\ker\ p = \mathrm{Im}\ \varphi$

Exercice 5 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\ ((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z); 2x + y - z = 0\}$.

1. Les sous-ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\dim\ F = 1$ et
   $u = (x,y,z) \in G \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow y = z - 2x \Leftrightarrow u = (x, z-2x, z) =$
   $x\underbrace{(1,-2,0)}_{=u_1} + z\underbrace{(0,1,1)}_{=u_2}$
   u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc forment une base de G et $\dim\ G = 2$.
   On a alors $\boxed{\dim\ E = \dim\ F + \dim\ G}$

L' intersection de F et G est constituée des vecteurs de la forme (a,a,a) vérifiant $2a+a-a=0 \Leftrightarrow a=0$ et $\boxed{F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}}$ puis $\boxed{E=F\oplus G.}$

2. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

   Il faut écrire la décomposition de tout vecteur u de E en somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, ce qui peut être fait à la question 1 et évite de déterminer les dimensions de F et G.

   $u=(x,y,z)=\underbrace{a(1,1,1)}_{=u_F}+\underbrace{b(1,-2,0)+c(0,1,1)}_{=u_G} \Leftrightarrow$

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& a+b \\ y &=& a-2b+c \\ z &=& a+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& x-a \\ c &=& z-a \\ y &=& a-2x+2a+z-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2}(2x+y-z) \\ b &=& \frac{1}{2}(-y+z) \\ c &=& \frac{1}{2}(-2x-y+3z) \end{array}\right.$$

   Puis $\boxed{p(u)=u_F=a(1,1,1)=\frac{1}{2}(2x+y-z)(1,1,1)}$

3. Soit s la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

   $\boxed{s(x,y,z)=u_G-u_F=(b-a,c-a-2b,c-a)=(-x-y+z,-2x+z,-2x-y+2z)}$

Exercice 6 On considère l'application $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z)=\left(\frac{2x+y+z}{3},\frac{x+2y-z}{3},\frac{x-y+2z}{3}\right)$$

On vérifie que f est linéaire (à faire) et on a $f(u)\in\mathbb{R}^3,\forall u\in\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

$f^2(x,y,z)=f\left(\frac{2x+y+z}{3},\frac{x+2y-z}{3},\frac{x-y+2z}{3}\right)=$

$\frac{1}{9}\left(2X+Y+Z,X+2Y-Z,X-Y+Z\right)$

avec $X=2x+y+z,Y=x+2y-z$ et $Z=x-y+2z$

$2X+Y+Z=4x+2y+2z+x+2y-z+x-y+2z=6x+3y+3z$

$X+2Y-Z=2x+y+z+2x+4y-2z-x+y-2z=3x+6y-3z$

$X-Y+Z=2x+y+z-x-2y+z+2x-2y+4z=3x-3y+6z$

et $f^2(x,y,z)=f(x,y,z)$. f est alors un projecteur.

Pour déterminer son noyau, on résout le système (en multipliant tout par 3) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 0 \\ x+2y-z &=& 0 \\ x-y+2z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 0 \\ y &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow -x=y=z \quad \boxed{\mathrm{Ker}\ f==\mathrm{Vect}\ ((1,-1,-1))}$$

Pour l'image on calcule les images des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ et on obtient $\mathrm{Im}\ f=\mathrm{Vect}(\underbrace{(2,1,1)}_{=f(e_1)};\underbrace{(1,2,-1)}_{=f(e_2)})$. en remarquant que $f(e_1)=f(e_2)+f(e_3)$

f est alors la projection sur le plan engendré par $(1,2,-1)$ et $(2,1,1)$ parallèlement à la droite engendrée par $(1,-1,-1)$