Probabilités sur un univers fini

1 Expérience aléatoire et calcul de probabilités

1.1 Vocabulaire probabiliste

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (ou épreuve), dont le résultat ne peut être prévu à l'avance avec certitude (il est soumis au hasard) et on note Ω l'ensemble des résultats possibles.

Vocabulaire ensembliste	Définitions	Vocabulaire probabiliste
Ω est un ensemble fini à n éléments.	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\text{card}\,(\Omega) = n$.	Ω est **l'univers** des issues (ou éventualités) possibles.
$A \subset \Omega$ est une partie de Ω.	$\omega \in A \Longrightarrow \omega \in \Omega$	A est un **événement** associé à $\mathcal{E}$. A est réalisé si le résultat de $\mathcal{E}$ appartient à A.
$\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω. $\{\omega\}$ est un singleton de Ω. $\emptyset$ est l'ensemble vide.	$A \in \mathscr{P}(\Omega) \Longleftrightarrow A \subset \Omega$. $\omega \in \Omega$.	$\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements associés à $\mathcal{E}$. $\{\omega\}$ est un **événement élémentaire** associé à $\mathcal{E}$. Ω est l'événement **certain**, $\emptyset$ est l'événement **impossible**.
$A \cup B$ est la réunion de deux parties de Ω. $A \cap B$ est l'intersection de deux parties de Ω.	$\omega \in A \cup B$ $\Longleftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$. $\omega \in A \cap B$ $\Longleftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$.	A et B étant deux événements, $A \cup B$ est l'événement "A **ou** B", $A \cap B$ est l'événement "A **et** B".
A et B sont deux parties disjointes de Ω. $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.	$A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$. $A \subset \Omega$, $\overline{A} \subset \Omega$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$ et $\overline{A} \cup A = \Omega$.	A et B sont deux événements **incompatibles**. $\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A.
$(A_i)_{1 \leq i \leq k} \in (\mathscr{P}(\Omega))^k$ est une partition de Ω.	$\forall i,\ A_i \subset \Omega,\ \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$ et $\forall (i,j),\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.	$(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ est un **système complet d'événements** de Ω.

Exemple 1. On lance deux dés tétraèdriques bien équilibrés. Proposer :

1. un événement élémentaire.
2. un événement du type $A \cup B$ puis un événement du type $A \cap B$.

3. deux événements incompatibles qui ne sont pas contraires.
4. deux événements contraires.
5. deux systèmes complets d'événements.

Cas particuliers : Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors

• $\big(\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}\big)$ est un système complet de n événements

• pour tout événement A, $(A, \overline{A})$ est un système complet de deux événements.

1.2 Loi de probabilité sur un univers Ω fini

Définition 1. Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathrm{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(A) \end{array} \right.$ vérifiant

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour tous événements A et B incompatibles $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini.

Dans toute la suite $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini.

Propriété 1. Si A et B sont deux événements alors

1. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$. En particulier $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(B \cap \overline{A})$
3. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
4. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Propriété 2. Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathrm{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i)$$

Remarque : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ \mathrm{P}(\{\omega_i\}) \in [0,1]$ et $\mathrm{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + \mathrm{P}(\{\omega_n\}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$

Théorème 1. Soit $(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Elle est définie par $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Exemple 2. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés.

Proposer une loi de probabilité sur l'univers Ω des issues possibles.

1.3 Loi de probabilité uniforme sur un univers fini

Définition 2. Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

On dit que P est la **probabilité uniforme** sur Ω ssi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega_j\})$

Dans ce cas on dit qu'il y a **équiprobabilité.**

Propriété 3. Si P est la probabilité uniforme sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$
2. Pour tout événement A, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)} = \dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple 3. On prend simultanément 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Proposer une loi de probabilité sur l'univers Ω des issues possibles, et calculer la probabilité des événements :

A : "obtenir l'as de coeur" B : "obtenir exactement deux rois"

C : "obtenir l'as de coeur ou exactement deux rois"

2 Probabilités conditionnelles et événements indépendants

2.1 Probabilités conditionnelles

Définition 3. Soit A un événement de probabilité non nulle.

La **probabilité conditionnelle** d'un événement B sachant A est le nombre réel

$$\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Interprétation Dans le cas où il y a équiprobabilité, on a $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{\mathrm{card}\,(A \cap B)}{\mathrm{card}\,(A)}$. On évalue ainsi la probabilité de l'événement B en restreignant l'univers à A (qui est réalisé).

Propriété 4. Si A est un événement de probabilité non nulle.

alors l'application $\mathrm{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & \mathrm{P}_A(B) \end{array} \right.$ est une probabilité sur Ω.

Propriété 5. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(A)$
2. si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}_B(A) = 0$.

Exemple 4. Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $1/12$ de malades. Parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ?
2. En déduire la probabilité qu'une personne soit malade.
3. Quelle est la probabilité pour une personne non vaccinée de tomber malade ?

Propriété 6. Formule des probabilités composées

Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}}(A_k).$$

Exemple 5. Un joueur débute un jeu et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1,
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est de 0,8,
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est de 0,6.

Calculer la probabilité des événements :

A_k :"la première partie que le joueur gagne est la k-*ième* partie jouée"

B_k :"le joueur gagne au moins une partie sur k parties jouées"

Propriété 7. Formule des probabilités totales

Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles

alors, pour tout événement B, $\quad \mathrm{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B).$

Exemple 6. Une urne contient dix boules : 2 bleues, 5 noires et 3 rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise, et on note dans l'ordre les résultats obtenus.

Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit bleue ?

Propriété 8. Formule de Bayes

Si $(A_1, \ldots, A_k)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.

alors, pour tout événement B de probabilité non nulle,

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \quad \mathrm{P}_B(A_j) = \frac{\mathrm{P}(A_j) \times \mathrm{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B)}.$$

Cas particulier : Si A et B sont de probabilités non nulles alors

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B)}{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(B)}.$$

Exemple 7. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires A, B, C, D. Il choisit d'emprunter les itinéraires A, B et C avec les probabilités respectives $1/3$, $1/4$ et $1/12$.

Les probabilités d'arriver en retard en empruntant les itinéraires A, B et C sont respectivement $1/20$, $1/10$ et $1/5$. En empruntant l'itinéraire D il n'est jamais en retard.

L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

2.2 Événements indépendants

Définition 4. Soient A et B deux événements.

On dit que A et B sont **indépendants** pour la probabilité P si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$.

Propriété 9. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A).$$

Remarque : D'après cette dernière propriété, on peut dire que des événements sont indépendants ssi la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre. Attention, deux événements de probabilités non nulles incompatibles ne sont pas indépendants car $\mathrm{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$. Aussi, deux événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais pas pour une autre, ce qui n'est pas le cas des événements incompatibles.

Exemple 8. On lance deux dés bien équilibrés, un noir et un blanc. Montrer que les événements suivants sont deux à deux indépendants :

A : "le chiffre du dé noir est pair"

B : "le chiffre du dé blanc est impair"

C : "les deux chiffres ont la même parité"

Propriété 10. Si A et B sont deux événements indépendants pour une probabilité P alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, puis $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants pour la probabilité P.

Définition 5. Soit $(A_1, \ldots, A_k)$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si, pour toute partie I de $[\![1, k]\!]$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i).$$

Remarque : Des événements deux à deux indépendants ne sont pas, en général, mutuellement indépendants (comme le montre l'exemple précédent). Par contre, des tirages successifs avec remises ou, plus généralement, des expériences aléatoires successives indépendantes conduisent naturellement à faire l'hypothèse que des événements sont mutuellement indépendants.

Exemple 9. Un archer tire sur deux cibles, une située à $20m$ et l'autre à $50m$. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la plus proche est p et la probabilité d'atteindre la plus éloignée est q avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu si il atteint deux cibles consécutivement.

Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?