Intégration

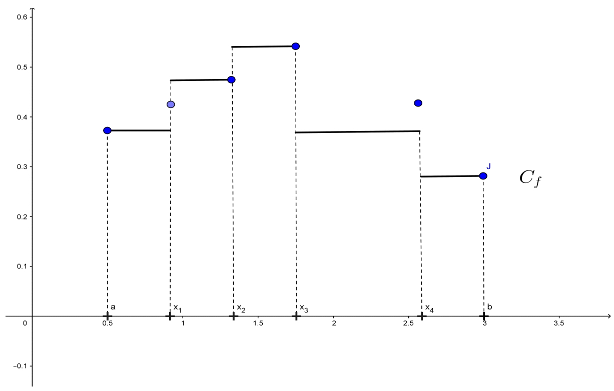
1 Intégrale d'une fonction en escalier

Dans toute cette partie a et b sont des réels tels que $a < b$, et n est un entier naturel non nul.

Définition 1. On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ toute suite réelle $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que : $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.

Dans ce cas, on dit que la **subdivision** $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ **est adaptée** à f.



Remarque : Une subdivision adaptée à une fonction en escalier n'est pas unique. Les valeurs aux extrémités des intervalles d'une telle subdivision sont quelconques.

Définition 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier, et $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ une subdivision adaptée à f.

On appelle **intégrale de** f sur l'intervalle $[a, b]$, le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k)$,

où y_k est la valeur de f sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

Cas particuliers : Si f est en escalier et positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Si f est constante de valeur λ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lambda(b-a) = \lambda(b-c) + \lambda(c-a)$.

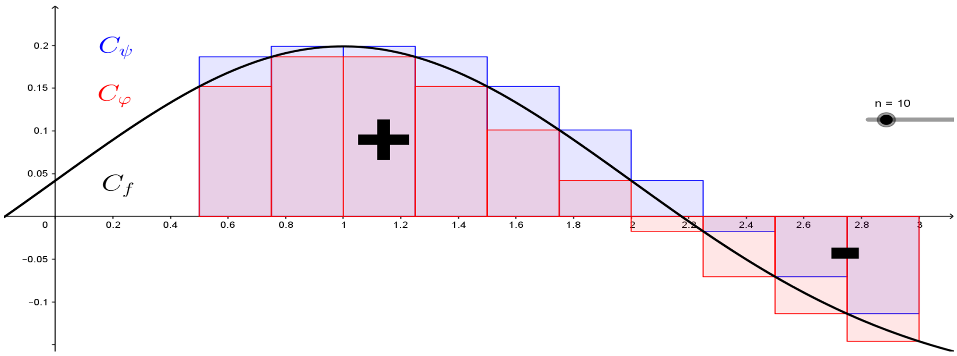
Remarque : L'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie, et des valeurs prises par f aux extrémités des intervalles d'une telle subdivision.

Exemple 1. Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.



L'ensemble $E_- = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \ / \ \varphi \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leq f \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Il admet donc une borne supérieure, notée $I_-(f)$.

L'ensemble $E_+ = \left\{ \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \ / \ \psi \text{ en escalier sur } [a,b] \text{ et } \psi \geq f \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Il admet donc une borne inférieure, notée $I_+(f)$.

Théorème 1. et définition (admis) Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ alors $I_-(f) = I_+(f)$.

L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le nombre réel défini par $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I_-(f) = I_+(f)$

L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est aussi notée $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Remarque La valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire algébrique (en unités d'aire) de la surface comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Définition 3. Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$.

1. Si $a > b$, alors on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
2. Si $a < b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 2. Calculer la valeur moyenne de $f : t \mapsto \sin^2(t)$ sur $[0, \pi]$.

2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

Propriété 1. (admise) Si $f, g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ et si $(a, b, c) \in I^3$ alors

1. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **Linéarité**
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ **Relation de Chasles**

Propriété 2. Soit $f, g \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a < b$).

1. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ **Positivité**
2. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **Croissance**
3. Dans tous les cas, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ **Inégalité triangulaire**

Exemple 3. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (J_n) définie par $\displaystyle J_n = \int_\pi^{2\pi} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 1. Soit f, une fonction réelle continue et positive sur $[a, b]$.

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

Exemple 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 |P(x)|\mathrm{d}x = 0$. Montrer que P est nul.

Propriété 3. Intégrale d'une fonction paire ou impaire Soit $I = [-a, a]$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

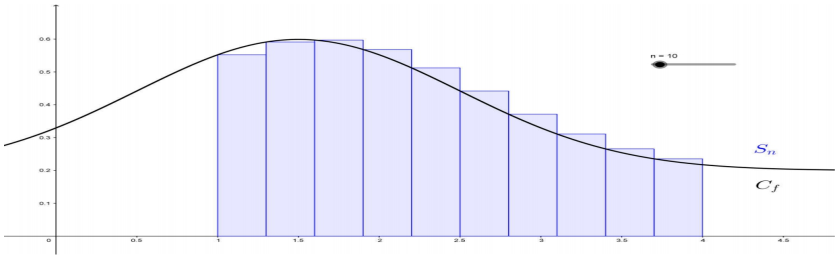
Si f est une fonction continue et paire sur I alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$

Si f est une fonction continue et impaire sur I, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$

Propriété 4. Intégrale d'une fonction périodique Si f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$

2.3 Approximation d'une intégrale par ses sommes de Riemann

Définition 4. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **sommes de Riemann** d'ordre n de f sur $[a,b]$ $\quad R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $R'_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$



Théorème 2. Convergence des sommes de Riemann Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ alors

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{ et}$$

$$R'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque : La moyenne des valeurs de f prises sur n points d'une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ tend vers la valeur moyenne de f sur ce même intervalle. Les sommes de Riemann de f nous donnent une approximation de son intégrale par la méthode des rectangles et l'erreur d'approximation est un $\mathcal{O}(1/n)$.

Corollaire 2. Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ alors $\quad \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

3 Calcul intégral

3.1 Le théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 3. Théorème fondamental du calcul intégral Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a :

$$F(a) = 0,\ F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I,\ F'(x) = f(x).$$

Remarque : La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est même de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car $F' = f \in \mathscr{C}^0(I)$.

Corollaire 3. Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I. De plus, $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ désigne une primitive quelconque de } f \text{ sur } I.$$

Exemple 6. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Cas particulier : Si $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

3.2 Intégration par parties et changement de variable

Théorème 4. Intégration par parties Soient $u, v \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$.

$$\text{Alors } \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 7. Déterminer l'unique primitive de la fonction arcsin qui s'annule en 0.

Théorème 5. Changement de variable Soit $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{R})$.

Si $\phi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et si $\phi(I) \subset J$ alors $\forall (a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 8. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{3 + \cos^2(t)}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$.

3.3 Décomposition en éléments simples

Proposition 1. Soient A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $F = \dfrac{A}{B}$

$\exists!(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in (\mathrm{K}[\mathrm{X}])^2$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{Q} + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ avec $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B})$.

Q est appelée **partie entière** de F, $\dfrac{R}{B}$ est appelée **partie fractionnaire** de F.

Exemple 9. Déterminer les parties entières et fractionnaires de $\mathrm{F} = \dfrac{X^2-5X+4}{X-2}$ et $\mathrm{G} = \dfrac{X^4+2X^2+X+1}{X^2+1}$

Définition 5. On appelle **élément simple** un quotient de polynôme $F = \dfrac{P}{Q^n}$ où Q est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarques 1) Dans $\mathbb{C}$[X], on a nécessairement deg(Q) = 1 et P constant.

2) Dans $\mathbb{R}$[X] : Soit deg(Q) = 1 et $F = \dfrac{P}{Q^n}$ est dit élément simple de **1**$^{\text{ère}}$ espèce (P constant)

Soit $\deg(Q) = 2$ et $F = \dfrac{P}{Q^n}$ est dit élément simple de $2^{\text{ème}}$ espèce ($P = aX + b$)

Définition 6. **Décomposer** une fraction rationnelle $F = \mathrm{Q} + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ **en éléments simples** dans $\mathbb{K}$[X] consiste à écrire la partie fractionnaire de F comme somme d'éléments simples dans $\mathbb{K}$[X]. Les dénominateurs de ces éléments simples sont les facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{K}$[X] mis à la puissance i pour tout i entre 1 et n où n est la puissance de ce facteur irréductible dans la factorisation de B.

Exemple 10. Décomposer en éléments simples les fractions suivantes puis en déterminer une primitive.

1 . Dans $\mathbb{C}$[X] : $\mathrm{F} = \dfrac{1}{X(X+1)}$ $\quad \mathrm{G} = \dfrac{1}{X^2+1}$ $\quad \mathrm{H} = \dfrac{X^3}{X^2-4}$

2. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathrm{F} = \dfrac{X^3}{X^2+1}$ $\quad \mathrm{G} = \dfrac{1}{(X^2+2)(X-1)}$

3.4 Inégalité de Taylor Lagrange

Théorème 6. **Formule de Taylor avec reste intégral** (non exigible) Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, et $a \in I$.

$$\text{Si } f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \text{ alors } \forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 7. **Inégalité de Taylor-Lagrange** Étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a, b]$, et M un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 11. 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

Démontrer que (u_n) converge vers e.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
   Montrer que cette suite converge vers $\ln(2)$.

Application : Formule de Taylor-Young Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, et $a \in I$.

$$\text{Si } f \in \mathscr{C}^n(I) \text{ alors} \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Remarque : La formule de Taylor-Young est locale.

3.5 Cas des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x$.

Exemple 12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx)\mathrm{d}x$ et $b_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(nx)\mathrm{d}x$.

Propriété 5. L'intégrale d'une fonction continue sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifie :

1. la relation de Chasles, la linéarité et l'inégalité triangulaire (pour le module),
2. le théorème fondamental du calcul intégral,
3. les formules d'intégration par parties et de changement de variable,
4. la formule de Taylor avec reste intégral.

Exemple 13. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,2\pi])$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = 0$.