Intégration

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que la suite (I_n) est monotone et converge vers un réel ℓ, à déterminer.
3. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n à l'aide d'une intégration par parties.
4. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 4$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'existence de trois réels positifs A, B et C tels que, pour tout entier $n \geq 4$, on ait :
$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$
4. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 1. Déterminer un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Déterminer la limite de $v_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)\,!}{n\,!\,n^n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4 Étudier la convergence des suites suivantes :

$u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}^*$ $\qquad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ $\qquad w_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 5 Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $J_{[m,n]}(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^n t^m\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer $J_{[m,n]}(x)$ en fonction de $J_{[m-1,n+1]}(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Calculer $J_{[0,n+m]}(x)$ puis $J_{[m,n]}(x)$.
3. En développant le binôme $(x-t)^n$, déterminer une autre expression de $J_{[m,n]}(x)$.
4. En déduire la valeur de la somme $S_{[m,n]} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p\,!(n-p)\,!\,(m+p+1)}$.

Exercice 6 Calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad G(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ (poser $u = \cos(2x)$)

3. $I = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = \sin(u)$) $\qquad$ 4. $J = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = t^2$).

Exercice 7 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]0,1[)$.
2. Montrer que $\forall t \in]0,1[, \quad \dfrac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1$.
3. En déduire que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 3 en 1, à déterminer.
6. En déduire la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 1. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 1.
7. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ après avoir tracé la droite $\mathcal{T}$.

Exercice 9 Calculer 1. $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t^2-1)\,(t+2)}$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^t \frac{x^5 - 2x^3 + 2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$ où $t \in]0;1[$.

2. Déterminer les valeurs des réels a, b, c tels que $\mathrm{F}(X) = \dfrac{X^2+2}{X^2(X-1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X-1}$ puis en déduire $\displaystyle\int_2^3 F(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 Par application de l'inégalité de Taylor Lagrange, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x.$$

Exercice 11 Calculer

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{i}+t}{1+2\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ 4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t-\mathrm{i})^2}$ après avoir déterminé les valeurs des réels a, b, c, d tels que $\dfrac{t^2}{(t-\mathrm{i})^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t^2} + \dfrac{c}{t-\mathrm{i}} + \dfrac{d}{(t-\mathrm{i})^2}$