Matrices et applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

1 Matrices et applications linéaires

1.1 Matrice d'une application linéaire

Dans cette partie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Définition 1. On appelle **matrice de** f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} \end{array} \text{, où } \forall j \in [\![1, p]\!], \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_j)).$$

Cas particulier : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ (endomorphisme), la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ est une matrice carrée d'ordre p que l'on notera simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. En particulier, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_p$ (matrice identité).

Exemple 1. Fondamental

1. Écrire la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport λ dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.
2. Écrire la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ dans le plan muni de sa base canonique.

Exemple 2. Dans chaque cas, écrire la matrice de f dans les bases canoniques :

a) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x, x - y) \end{array} \right.$ b) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$

Lemme 1. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie p et de base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Alors l'application $\varphi_{\mathscr{B}} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Propriété 1. Matrice de l'image d'un vecteur Soit $u \in E$.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u))$ alors $Y = AX$.

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Expliciter f si

1. A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dans les bases canoniques.

2. A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X])$ dans les bases canoniques.

Théorème 1. (et définition) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

l'application $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est linéaire et vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f_A) = A$,

où $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont les bases canoniques de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, respectivement.

f_A est appelée **application linéaire canoniquement associée à A.**

Exemple 4. Expliciter l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer son noyau et son rang.

1.2 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Dans cette partie, E, F et G ont pour bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$.

Propriété 2. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g) \iff f = g$ 2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f + \lambda g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$

Application 1 : L'application $\phi_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme et

$$\boxed{\dim\left(\mathscr{L}(E, F)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = np}$$

Propriété 3. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$

Cas particulier : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^k$

Exemple 5. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ si

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x, x - y) \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, 3x + y + 4z) \end{array} \right.$$

Propriété 4. Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)^{-1}$.

Exemple 6. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, y+2z, x) \end{array}\right.$ Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ et expliciter f^{-1}.

Application 2 : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi l'endomorphisme f_A canoniquement associé à A est bijectif. Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f_A^{-1} dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et f_A^{-1} est l'endomorphisme canoniquement associé à A^{-1}. Ainsi, on retrouve l'équivalence des assertions :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. (ii) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AX = B$ (i.e f_A bijective).

(iii) $AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X = 0_{n,1}$ (i.e f_A injective). (iv) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AX = B$ (i.e f_A surjective).

Dans ce cas, A^{-1} vérifie : $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$.

2 Rang d'une matrice et changement de base

2.1 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et f_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

1. Le noyau de A est défini par $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}f_A$ (s.e.v. de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$).
2. L'image de A est définie par $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}f_A$ (s.e.v. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
3. Le rang de A est défini par $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}f_A$.

Conséquence : $\mathrm{Ker}A = \{\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\ \}$

De plus, si $C_1, \ldots, C_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les colonnes de A alors on a

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{VeCt}(C_1, \ldots, C_p) \ \text{ et }\ \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p) \leq \min(p, n).$$

Exemple 7. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 2. Théorème du rang Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{rg}A + \dim(\mathrm{Ker}A) = p$.

Propriété 5. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}A\ , \qquad \mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A.$$

Conséquence : Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang. Le rang d'une matrice A est le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée réduite de A.

Exemple 8. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Théorème 3. Caractérisation de l'inversibilité Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = n \\ &\iff \exists\, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n \quad (\text{dans ce cas } A^{-1} = B) \\ &\iff \exists\, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ CA = I_n \quad (\text{dans ce cas } A^{-1} = C) \\ &\iff \text{les colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{les lignes de } A \text{ forment une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \text{l'endomorphime canoniquement associé à } A \text{ est bijectif.} \end{aligned}$$

Propriété 6. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, où E et F ont pour bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ alors 1. $u \in \mathrm{Ker} f$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{Ker} A$

2. $v \in \mathrm{Im} f$ ssi $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v) \in \mathrm{Im} A$ 3. $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A$.

Exemple 9. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = XP' - 2P$

Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et déterminer son noyau, son image et son rang.

2.2 Matrice de passage d'une base à une autre

Dans cette partie, E admet pour bases $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Définition 3. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, la matrice :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \text{, où } \forall j \in [\![1, n]\!],\ \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_j).$$

Remarque : Si f est l'unique endomorphisme de E tel que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = e'_j$, alors f est un automorphisme de E (transforme une base en une base), dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Ainsi, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Exemple 10. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$, où

$$e_1' = (1, 2, 1),\ e_2' = (1, 2, 2) \text{ et } e_3' = (0, 1, 2).$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, expliciter $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, puis déterminer $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Théorème 4. Formule de changement de base Soit $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $u \in E$.

$$\text{Si } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ et } X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) \text{ alors } X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X.$$

Exemple 11. Avec les notations de l'exemple 10, on considère le vecteur u de coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathscr{B}'$. Retrouver les coordonnées de u dans la base canonique.

Théorème 5. Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$, où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des bases de F.

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(f)$ alors $A = QA'P^{-1}$ et $A' = Q^{-1}AP$.

Cas particulier : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\text{Si } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ et } A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \text{ alors } A = PA'P^{-1} \text{ et } A' = P^{-1}AP.$$

Dans ce cas : $f \in \mathrm{GL}(E) \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On dit alors que les matrices A et A' sont **semblables**.

Exemple 12. Avec les notations de l'exemple 10, on considère la matrice

$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Déterminer la matrice $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.