Matrices et applications linéaires

Exercice 1 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$.

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right.$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$. En déduire que $BA = I_n$ et que A est inversible, d'inverse B.

Exercice 2 Dans chaque cas, montrer que f est linéaire, puis déterminer sa matrice dans les bases canoniques, son noyau et son image :

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+5z, x+y) \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X+1) - (X+1)P'(X) \end{array} \right.$

Exercice 3 Dans chaque cas, expliciter les s.e.v. $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Im}A$, puis déterminer si ils sont supplémentaires :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

On pose $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (-1,-2,1)$ et $u_3 = (8,-2,7)$.

Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 5 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, et l'application f définie sur E par $f(P) = (X+1)P' - P$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$, puis déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   L'application f est-elle bijective ?
2. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de E.
   Déterminer la matrice A' de f dans celle-ci.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Donner une relation entre A, A' et P. Vérifier ce résultat sans calculer P^{-1}.

Exercice 6 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. On note F et G les sous espaces caractéristiques de f.
   (a) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F, et une base $\mathscr{B}_2$ de G.
   (b) Montrer que $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Application : résoudre le système différentiel $(S)\begin{cases} 3x' = -x + 2y - 2z \\ 3y' = 2x - y - 2z \\ 3z' = -2x - 2y - z \end{cases}$,

   où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables,
   $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ et $z' = \dfrac{dz}{dt}$.

Exercice 7 Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$ et $\varphi(P) = P(1)$.

1. Montrer que f induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (1, -2X+1, 6X^2 - 6X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Écrire la matrice de passage Q de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Calculer son inverse Q^{-1}.
6. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$, en donnant tous les calculs intermédiaires. Quelle relation existe-t-il entre les matrices A, M, et Q ?
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de la matrice A^n.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
9. En déduire que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi\left(f^n(P)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$