Fiche de révisions

1 Dénombrement

E et F sont des ensembles finis.

1) **Cardinal d'une union disjointe** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(E_i).$$

2) **Cardinal d'un produit cartésien** Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors
$\operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \operatorname{card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{card}(E_n)$

3) **Modèle de tirages successifs dans des urnes différentes :** Si on tire successivement un élément dans l'urne E_1 contenant n_1 éléments, un élément dans E_2 à n_2 éléments, ..., un élément dans E_p à n_p éléments, alors il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ tirages possibles (principe multiplicatif).

4) **Modèle de tirages successifs avec remise dans une urne :** Effectuer p tirages **successifs** avec **remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p-liste d'éléments de cette urne. Il y a donc n^p façons de le faire. L'**ordre** intervient et il peut y avoir **répétition** d'un élément.

5) **Nombre d'applications** F^E est fini et $\operatorname{Card}\left(F^E\right) = (\operatorname{Card}(F))^{\operatorname{Card}(E)}$.

6) **Nombre de parties d'un ensemble** $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\operatorname{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\operatorname{Card}(E)}$.

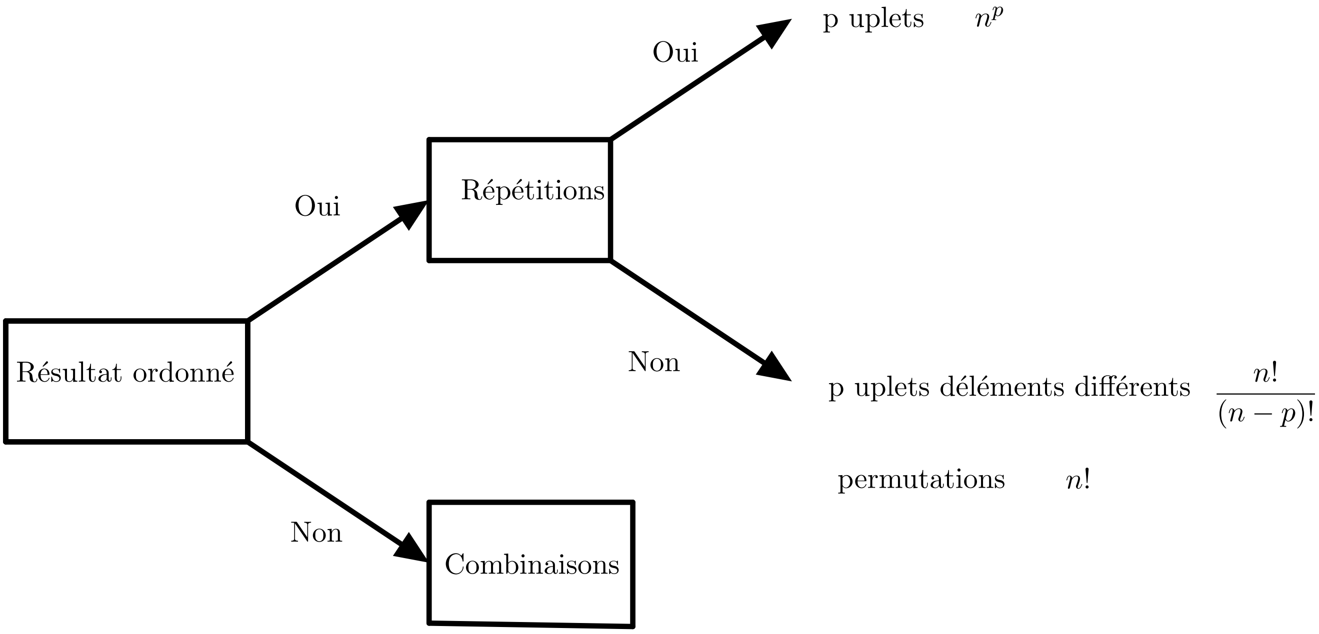
7) **Modèle de tirages successifs sans remise dans une urne :** Effectuer p tirages **successifs** et **sans remise** dans une urne contenant n éléments, c'est choisir une p-liste sans répétition d'éléments de cette urne. Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ façons de le faire. Dans ce cas, l'**ordre** intervient et il n'y a **pas de répétition** d'un élément.

8) **Nombre d'applications injectives** d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

9) **Nombre de permutations ou nombre de bijections** Le nombre de n-listes sans répétition de E est $(\operatorname{Card} E)!$

10) **Modèle de tirage simultané dans une urne :** Tirer **simultanément** p éléments dans une urne qui contient n éléments, c'est choisir une p-combinaison d'éléments de cette urne.
Il y a donc $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ façons de le faire. Dans ce cas, il n'y a **ni ordre, ni répétition**.

11) **Schéma récapitulatif**



2 Probabilités

1) **Probabilité conditionnelle** d'un événement B sachant A : $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

2) **Formule des probabilités composées** Si $(A_1, \dots, A_k)$ est une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) > 0$ alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$$

3) **Formule des probabilités totales** Si $(A_1, \dots, A_k)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors, pour tout événement B,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B)$$

4) **Formule de Bayes** Si $(A_1, \dots, A_k)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles alors, pour tout événement B de probabilité non nulle,

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \quad \mathrm{P}_B(A_j) = \frac{\mathrm{P}(A_j) \times \mathrm{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B)}$$

Cas particulier : Si A et B sont de probabilités non nulles alors

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B)}{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}_{\overline{A}}(B)}$$

5) On dit que A et B sont **indépendants** pour la probabilité P si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$.

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A).$$

6) Soit $(A_1, \dots, A_k)$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \dots, A_k)$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si, pour toute partie I de $[\![1, k]\!]$, $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i)$.

3 Analyse asymptotique

1) f est **dominée** par g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

2) f est **négligeable** devant g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

3) f est **équivalente** à g en a i.e $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

4) **Équivalents usuels** $\quad \sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

5) **Compatibilité avec les opérations**

Si f, g, h et l sont telles que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \to a}{\sim} l(x)$ alors

$$f(x)h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)l(x) \qquad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{g(x)}{l(x)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \ [f(x)]^k \underset{x \to a}{\sim} [g(x)]^k$$

si f et g sont strictement positives au voisinage de a, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $[f(x)]^\alpha \underset{x \to a}{\sim} [g(x)]^\alpha$.

6) **Formule de Taylor-Young** Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $a \in I$ alors

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n).$$

7) **Application : DL usuels en 0**

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

8) **DL en** a On pose $x = a + h$ et $h \to 0$

9) **DL et équivalents** Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$ et $a_p \neq 0$ alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.$$

10) **DL, tangente et position** Si $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$ avec $a_p \neq 0$,

alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en $(a, f(a))$ d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ et la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de a s'obtient en étudiant le signe du terme $a_p(x-a)^p$.

11) **DL, asymptote et position** Si $tf\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} a_0 + a_1 t + a_p t^p + o(t^p)$ avec $a_p \neq 0$,

alors on peut écrire $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right)$.

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = a_0 x + a_1$ en $\pm\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote au voisinage de $\pm\infty$.

4 Applications linéaires

E et F sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels

Si dim $E < \infty$ on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

1)$f : E \to F$ est dite **linéaire** si $\forall (u,v) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

Dans toute la suite on considère $f \in \mathscr{L}(E, F)$

2) Ker $f = \{u \in E / f(u) = 0_F\} = f^{-1}(0_F)$

3) Im $f = \{f(u), u \in E\} = f(E)$

Si dim $E < \infty$, Im f = Vect $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$

4) **Théorème du rang** : Si dim $E < \infty$, dim E = rg (f) + dim Ker (f)

5) f est **injective** ssi Ker $f = \{0_E\}$

Si dim $E < \infty$, f est injective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est libre

6) f est **surjective** ssi Im f = F

Si dim $E < \infty$, f est surjective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est génératrice de F

7) f est **bijective** ssi f est injective et surjective.

Si dim $E < \infty$, f est un isomorphisme de E sur F ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de F.

8) Si dim E = dim F alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

9) **Conditions nécessaires en dimension finie**
- Si dim $E >$ dim F alors f ne peut être injective.
- Si dim $E <$ dim F alors f ne peut être surjective.
- Si dim $E \neq$ dim F alors f ne peut être bijective.

10) f est un **endomorphisme** si f est linéaire et $E = F$

11) f est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective

12) f est un **automorphisme** si f est linéaire, bijective et E = F (endo + iso)

Si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

13) **Projecteur** sur F parallèlement à G $\quad p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 \end{array} \right.$

14) $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

15) **Caractérisation des projecteurs** $p : E \longrightarrow E$ est un projecteur ssi $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$.
Dans ce cas, $E =$ Im $p \oplus$ Ker p et p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p.

16) **Symétrie** par rapport à F parallèlement à G $\quad s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_1 - u_2 \end{array} \right.$.

17) $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F

18) $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G ssi $s = 2p - \mathrm{Id}$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

19) **Caractérisation des symétries** $s : E \longrightarrow E$ est une symétrie ssi $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas $E =$ Ker $(\mathrm{Id}_E - s) \oplus$ Ker $(\mathrm{Id}_E + s)$ et s est la symétrie par rapport à $F =$ Ker $(\mathrm{Id}_E - s)$ parallèlement à $G =$Ker $(\mathrm{Id}_E + s)$.