Devoir maison n$^{\text{o}}$ 22

A rendre le jeudi 23 mai 2024

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On notera Γ la courbe représentative de F.

1. **Quelques proriétés de F sur $\mathbb{R}_+^*$**

   (a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ F(x) \geq 0$.

   Indication : on pourra d'abord considérer le cas où $x \geq 1$, puis celui où $0 < x < 1$.

2. **Étude de F aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$**

   (a) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \varphi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

   Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

   On notera encore F le prolongement ainsi obtenu.

   (d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.

   Que dire de Γ en son point d'abscisse 0 ?

   (e) Déterminer la limite de F quand x tend vers $+\infty$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1.(C).

3. **Approximation des valeurs de F**

   (a) Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

(c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln(t) \mathrm{d}t.$$

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - w_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.