Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 21

Exercice 1 On considère n personnes qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, ainsi de suite jusqu'à la *n-ième* personne qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement I_n : "la *n-ième* personne transmet l'information I" et on pose $p_n = \mathrm{P}(I_n)$. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathrm{P}(I_{n+1}) \\ &= \mathrm{P}(I_n)\mathrm{P}_{I_n}(I_{n+1}) + \mathrm{P}(\overline{I_n})\mathrm{P}(I\overline{I}_{nn+1}) \\ &= p_n \times p + (1 - p_n)(1 - p) \\ &= (2p - 1)p_n + 1 - p. \end{aligned}$$

– $\underline{\text{Si } p = \frac{1}{2}}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 1 - p = \frac{1}{2}$ et (p_n) est stationnaire à partir du rang 1.

– $\underline{\text{Si } p \neq \frac{1}{2}}$: On résout

$$x = (2p - 1)x + 1 - p \iff x = \frac{1 - p}{2 - 2p} = \frac{1 - p}{2(1 - p)} = \frac{1}{2}.$$

On pose $v_n = p_n - \frac{1}{2}$. On montre que (v_n) est géométrique de raison $(2p - 1)$ et de premier terme

$$v_0 = p_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}}$.

De plus, $0 < 2p < 2$ donc $-1 < 2p - 1 < 1$ et $\boxed{p_n \longrightarrow \frac{1}{2}}$.

Exercice 2

1. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$p(X + \lambda X') = A(X + \lambda X') = AX + \lambda AX' = p(X) + \lambda p(X').$$

   De plus, $p(X) = AX$ est une matrice colonne de trois lignes. Donc on a bien $\boxed{p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

2. Par le calcul, on trouve $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A}$.

   Donc, $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $p \circ p(X) = p(p(X)) = p(AX) = AAX = A^2X = AX = p(X)$.

   Donc $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $p \circ p = p$ et, par le théorème de caractérisation des projecteurs,

   $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) \text{ et } p \text{ est le projecteur sur } F = \mathrm{Im}(p) \text{ parallèlement à } G = \mathrm{Ker}(p)}$.

3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

   $$p(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ p(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2p(e_1),\quad p(e_3) = p(e_1).$$

   Donc $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \mathrm{Vect}(p(e_1))$, avec $p(e_1)$ non nul.

   Donc $\boxed{F \text{ admet pour base } \mathscr{B}_1 = (p(e_1)) \text{ et } \dim(F) = \mathrm{rg}(p) = 1}$.

   Par le théorème du rang $\dim(G) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(p) = 3 - 1 = 2$.

   De plus, $p(e_2) = 2p(e_1) \underset{\text{linéarité}}{\Longrightarrow} p(e_2 - 2e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et
   $p(e_3) = p(e_1) \underset{\text{linéarité}}{\Longrightarrow} p(e_3 - e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   $e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

   Donc $\mathscr{B}_2 = (e_2 - 2e_1, e_3 - e_1)$ est une famille de vecteurs de $G = \mathrm{Ker}(p)$, libre de rang $2 = \dim(G)$.

   Donc $\boxed{G \text{ admet pour base } \mathscr{B}_2 = (e_2 - 2e_1, e_3 - e_1) \text{ et } \dim(G) = 2}$.

4. D'après le cours, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, vérifiant

   $$s(X) = 2p(X) - X = 2AX - X = (2A - I_3)X.$$

   Donc $\boxed{s : X \longmapsto BX, \text{ où } B = 2A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}}$.

Exercice 3

1. $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

   Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 0 \text{ est asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty}$.

2. Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissance comaparée et opérations sur les limites.

   De même, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \times \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ n'admet pas de droite asymptote en } +\infty}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+x^2) - 2x\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, et $f'(x) = 0 \iff x = 1$.

   Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

4. $\mathrm{e}^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to0}{=} 1 - x^2 + o(x^3)$.

   Par produit de développements limités, $\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{6} + o(x^3)}$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en 0 est la droite } T_0 \text{ d'équation } y = 1+x}$.

   De plus, $f(x) - (1+x) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \leq 0$ et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } T_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

5. On pose $x = 1 + h \underset{h\to0}{\longrightarrow} 1$, et on calcule $f(1+h) = \dfrac{\mathrm{e}^{1+h}}{1+(1+h)^2} = \dfrac{\mathrm{e}}{2} \times \dfrac{\mathrm{e}^h}{1+h+\frac{h^2}{2}}$.

   $h + \dfrac{h^2}{2} \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition,

   $$\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \underset{h\to0}{=} 1 - \left(h+\frac{h^2}{2}\right) + \left(h+\frac{h^2}{2}\right)^2 - \left(h+\frac{h^2}{2}\right)^3 + o(h^3) \underset{h\to0}{=} 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^3),$$

   $$f(1+h) \underset{h\to0}{=} \frac{\mathrm{e}}{2}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) \underset{h\to0}{=} \frac{\mathrm{e}}{2}\left(1 + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

   Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to1}{=} \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en 1 est la droite horizontale } T_1 \text{ d'équation } y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}}$.

   De plus, $f(x) - \dfrac{\mathrm{e}}{2} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{12}(x-1)^3$. Donc, comme f est strictement croissante,

   $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } T_1 \text{ si } x \leq 1, \text{ et au-dessus si } x \geq 1 \text{ (point d'inflexion)}}$.

6.

7. Par primitivation du DL de f en 0 on obtient
   $\boxed{F(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)}$.