Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (6.5 points : 1) 3x0.5 2) a) 1 b) 1 3) a) 1.5 b) 1.5)

1. $\alpha = \dfrac{115\pi}{6} = \dfrac{120\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $\boxed{\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\alpha) = -\dfrac{1}{2}}$

   $\beta = -\dfrac{55\pi}{8} = -\dfrac{48\pi}{8} - \dfrac{7\pi}{8} = -\pi + \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$ donc $\cos(\beta) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et
   $\sin(\beta) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

   $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ donc
   $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

   $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

   Finalement, $\boxed{\cos(\beta) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

   $\gamma = \dfrac{101\pi}{12} = \dfrac{96\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ donc $\cos(\gamma) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin(\gamma) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
   Par la même démarche que celle pour trouver le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{8}$, on obtient

   $\boxed{\cos(\gamma) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ et } \sin(\gamma) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

2. a) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   $\boxed{\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{6}\ [\pi]}$

   b) $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$
   $\Leftrightarrow x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - -\dfrac{x}{4}\ [2\pi]$ ou $x - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + -\dfrac{x}{4}\ [2\pi]$

   $\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}x = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $\dfrac{3}{4}x = -\dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ $\boxed{\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{5}\ [\dfrac{8\pi}{5}] \text{ ou } x = -\dfrac{5\pi}{3}\ [\dfrac{8\pi}{5}]}$

3. a) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in]\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

   $\boxed{\Leftrightarrow x \in]\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2} + 4k\pi[, k \in \mathbb{Z}}$

b) **Attention aux valeurs interdites !** Ici $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\tan(2x) \geq -1 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x \in [-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi[\cup[\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\Leftrightarrow x \in [-\dfrac{\pi}{8} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi[\cup[\dfrac{3\pi}{8} + k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{4} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 2 (6.5 points : 1) 3×0.5 2) 6×0.5 3) a) 0.5 b) 0.5 c) 1)

1. $a = \dfrac{(2-\mathrm{i})^2}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{(4-4\mathrm{i}-1)(1-2\mathrm{i}}{5} = -1-2\mathrm{i}$

   $b = \dfrac{5+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = \dfrac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{10} - \dfrac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{26}$

   $b = \dfrac{13(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) - 5(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{130} = \dfrac{8}{65}(7+4\mathrm{i})$

   $c_n = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^n = \cos(n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants (où x est un paramètre réel) :

   $a = \dfrac{3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2(1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $b = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9 = \left(\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}\right)^9 = \mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

   $c = -a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $d = \dfrac{-3b}{ia^2} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \times \dfrac{9}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $\mathrm{e} = \sin(x) - \mathrm{i}\cos(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}$

   $f = \dfrac{1-\mathrm{i}\tan(x)}{1+\mathrm{i}\tan(x)} == \dfrac{\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)}{\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

3. $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2\mathrm{i}$.

   a)$P(\mathrm{i}) = 0$.

   b)$P(z) = P(z) - P(\mathrm{i}) = z^3 - \mathrm{i}^3 + 3(z^2 - \mathrm{i}^2) + 3(z - \mathrm{i})$

   $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z + \mathrm{i}^2) + 3(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) + 3(z-\mathrm{i})$

   $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1 + 3z + 3\mathrm{i} + 3) = (z-\mathrm{i})(z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i})$

   c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \mathrm{i}$ ou $z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i} = 0$

   $\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(2+3\mathrm{i}) = 9 + 6\mathrm{i} - 1 - 8 - 12\mathrm{i} = -6\mathrm{i} = 6\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

   $\delta = \sqrt{6}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$

   $z_2 = \dfrac{-3+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1-\sqrt{3})}{2}$ et $z_3 = \dfrac{-3-\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})}{2}$

Exercice 3 (7 points :1) 2x0.5 2) 4x0.25+2x0.5 3) a) 0.5+0.5 b) 1 c) 1 d) 0.5 e) 0.5)

Soit ρ un réel strictement positif et θ un angle compris entre 0 et π i.e. $\rho > 0$ et $\theta \in [0, \pi]$.

On s'intéresse dans cet exercice à la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $z_0 = \rho e^{i\theta}$ qui satisfait à la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. Si $\theta = 0$ alors $z_0 = \rho$ et en supposant que $z_n = \rho$ à un rang n, on obtient $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) = \frac{1}{2}(\rho + \rho) = \rho$, donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à ρ, par récurrence.

   Si $\theta = \pi$ $z_0 = -\rho, z_1 = 0$ et en supposant que $z_n = 0$ à un rang n, on obtient $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) = 0$, donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle, à partir du rang 1, par récurrence.

2. Si $\theta = \frac{\pi}{2}, z_0 = \rho e^{\frac{i\pi}{2}}$

   $$z_1 = \frac{1}{2}\left(\rho e^{\frac{i\pi}{2}} + \rho\right) = \frac{1}{2}\rho\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + 1\right) = \frac{1}{2}\rho e^{\frac{i\pi}{4}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho e^{\frac{i\pi}{4}}$$
   $$z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho e^{\frac{i\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\rho e^{\frac{i\pi}{8}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{i\pi}{8}}$$
   $$z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{i\pi}{8}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{i\pi}{16}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$$
   $$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)e^{\frac{i\pi}{16}}$$

   D'après la figure, on peut conjecturer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

3. Étude générale On suppose dorénavant que $\theta \in]0, \pi[$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \frac{1}{2}|z_n + |z_n|| \leqslant \frac{1}{2}(|z_n| + |z_n|) = |z_n|$ d'après l'inégalité triangulaire. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante. Or c'est une suite de termes positifs, donc elle est minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Vérifier par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = \rho e^{\frac{i\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

Initialisation Pour $n = 1, z_1 = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta} + \rho\right) = \frac{1}{2}\rho\left(e^{i\theta} + 1\right) = \frac{1}{2}\rho e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\rho e^{\frac{i\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \rho e^{\frac{i\theta}{2^n}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc l'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité Supposons que $z_n = \rho e^{\frac{i\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$ à un rang n,

on a alors $|z_n| = \rho\prod_{k=1}^{n}|\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)|$

Or $\theta \in [0, \pi]$, donc $\dfrac{\theta}{2^k} \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) \geqslant 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Donc $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\rho e^{\frac{i\theta}{2^n}} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) + \rho \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)\right)$

$z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\rho \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)\left(e^{\frac{i\theta}{2^n}} + 1\right)$

Or $e^{\frac{i\theta}{2^n}} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) e^{\frac{i\theta}{2^n}}$ et l'égalité est démontrée au rang $n+1$.

Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer également que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

Initialisation pour $k = 1$, $\dfrac{\sin\theta}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ donc l'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité Supposons que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ à un rang n, on a alors

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

Or $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$

D'où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$ et l'égalité est démontrée au rang $n+1$.

Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) En déduire la limite de $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (Cf a)). (On rappelle que $\dfrac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1 lorsque X tend vers 0).

$|z_n| = \rho \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) = \rho \dfrac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

Or $2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\dfrac{\theta}{2^n}} \times \theta \to \theta$ lorsque n tend vers $+\infty$

car $\dfrac{\theta}{2^n} \to 0$ et $\dfrac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1 lorsque X tend vers 0.

Donc $|z_n|$ tend vers $\rho\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Vers quoi tend la suite $(\operatorname{Arg}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des arguments de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$.

$\arg(z_n) = \dfrac{\theta}{2^n}\ [2\pi] \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n = \rho\dfrac{\sin\theta}{\theta}$