Variables aléatoires sur un univers fini

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini associé à une expérience aléatoire.

1 Définitions

Définition 1. Une **variable aléatoire** (réelle) sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

- L'ensemble des valeurs que peut prendre X est appelé **univers image** de X, et noté $X(\Omega)$.
- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / \ X(\omega) \in A\}$ est un **événement** noté $(X \in A)$.

Exemple 1. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés. On note X la somme des résultats.

1. Décrire les événements $(X = 4)$ et $(X \geq 6)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X = 4)$ et $\mathrm{P}(X \geq 6)$.

Remarque : Attention, écrire $X \geq a$ sans parenthèse signifie que $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a$. Dans ce cas, l'événement $(X \geq a)$ est certain et $\mathrm{P}(X \geq a) = 1$.

Définition 2. Soit X une v.a.r. sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X l'application

$$P_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

Lorsque deux variables aléatoires X et Y ont la même loi, on note $X \sim Y$.

Propriété 1. Si X est une v.a.r. sur Ω d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors

1. $\{(X = x_1), \dots, (X = x_n)\}$ est un système complet d'événements de Ω.
2. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X \in A) = \displaystyle\sum_{x_i \in A} \mathrm{P}(X = x_i)$.

Remarque : La loi P_X est entièrement déterminée par la donnée des $\mathrm{P}(X = x_i)$, $x_i \in X(\Omega)$.

Exemple 2. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés. On note X la somme des résultats.

Définir la loi de X à l'aide d'un tableau de valeurs.

Définition 3. Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
On note $f(X)$ la **variable aléatoire image** de la variable aléatoire X par la fonction f définie par $f(X)(\omega_i) = f\big(X(\omega_i)\big)$ pour tout $\omega_i \in \Omega$.

Dans toute la suite, X désigne une v.a.r. sur Ω d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

2 Espérance, variance et écart-type

2.1 Espérance mathématique

Définition 4. On appelle **espérance** de X le nombre réel $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X = x_i)$

Si $\mathrm{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée.**

Exemple 3. Un jeu consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

On gagne 2 euros pour chaque résultat "pile" et on perd 1 euro pour chaque résultat "face".

On note G le gain en euros à l'issue d'une partie. Déterminer l'espérance de G.

Cas particuliers : v.a.r. constantes et indicatrices

- Si $b \in \mathbb{R}$ et si $X = b$, alors $\mathrm{E}(X) = b$.
- Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est un événement et si $X = \mathbf{1}_A$, alors $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(A)$.

Lemme 1. L'espérance de X vérifie $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathrm{P}(\{\omega\})$

Propriété 2. Si X et Y sont deux v.a.r. sur Ω, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors

1. $\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$ **Linéarité de l'espérance**
2. si $X \geq 0$ alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$ **Positivité de l'espérance**
3. si $X \leq Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$ **Croissance de l'espérance**
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$ **Inégalité triangulaire**

Remarque : $\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right) = 0$. On dit que $Y = X - \mathrm{E}(X)$ est la **v.a.r. centrée associée** à X.

Théorème 1. **Théorème de transfert** Si $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle

alors $\quad \mathrm{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{P}(X = x_i)$.

Exemple 4. Pour la situation de l'exemple 3, calculer $\sigma = \sqrt{\mathrm{E}\left[(G - \mathrm{E}(G))^2\right]}$. Interpréter.

2.2 Variance et écart-type

Définition 5. On appelle variance de X le nombre réel $\quad V(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right]$

On appelle écart-type de X le nombre réel $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée réduite.**

Propriété 3. 1. $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ **Formule de König-Huygens**

2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Remarque : La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la **variable centrée réduite associée** à X.

Exemple 5. Au jeu de la roulette, les 37 éventualités $\{0; 1; 2; \ldots; 36\}$ sont équiprobables.
Les numéros impairs sont rouges, les numéros pairs sont noirs, sauf le 0 qui est vert. Si on mise 1 euro sur "rouge ", on gagne 1 euro si un numéro rouge sort, sinon on perd sa mise. Lorsqu'on mise 1 euro sur un numéro, on gagne 35 euros si le numéro sort, sinon on perd sa mise.

Comparer ces deux façons de jouer (espérance de gain et écart-type).

Propriété 4. **Inégalité de Markov** Si X est une v.a. réelle **positive** alors

$$\forall a > 0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Propriété 5. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Interprétation : Par passage à l'événement contraire, cela s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

A priori, on peut dire que $X(\omega)$ sera proche de $\mathrm{E}(X)$ à ε près avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$. Si, par exemple, $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}\leq 0,05$ alors on peut dire que $X(\omega)$ sera dans l'intervalle $[\mathrm{E}(X)-\varepsilon,\mathrm{E}(X)+\varepsilon]$ avec un risque d'erreur de 5%.

3 Quelques lois usuelles sur un univers fini

3.1 Loi uniforme

Définition 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dit que la v.a.r. X suit **la loi uniforme sur** $\{x_1,\dots,x_n\}$ si

$$X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}\quad\text{et}\quad\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{P}(X=x_i)=\frac{1}{n}.$$

Dans ce cas, on note $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\{x_1,\dots,x_n\})$. Si $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, on note $X\sim\mathscr{U}(n)$.

Exemple 6. Parmi n objets, un seul est défectueux. On teste les objets les uns après les autres, et on note X la variable aléatoire qui donne le rang du test où l'objet défectueux est détecté.

Montrer que X suit une loi uniforme.

Propriété 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $X\sim\mathscr{U}(n)$ alors $\mathrm{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$.

3.2 Loi de Bernoulli

Définition 7. Soit $p\in[0,1]$. On dit que la v.a.r. X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega)=\{0,1\},\quad\mathrm{P}(X=1)=p\quad\text{et}\quad\mathrm{P}(X=0)=1-p.$$

Dans ce cas, on note $X\sim\mathscr{B}(p)$.

Exemple 7. Soit A un événement de probabilité $p\in[0,1]$. Montrer que $X=\mathbf{1}_A\sim\mathscr{B}(p)$.

Remarque : Réciproquement, si $X\sim\mathscr{B}(p)$ et $A=(X=1)$ alors $X=\mathbf{1}_A$.

Propriété 7. Soit $p\in[0,1]$. Si $X\sim\mathscr{B}(p)$ alors $\mathrm{E}(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

3.3 Loi Binomiale

Modèle de tirages avec remise : Une urne contient N boules dont a sont rouges et $N-a$ non rouges. On tire **successivement et avec remise** n boules de l'urne ($n\in\mathbb{N}^*$) et on note X le nombre de boules rouges obtenues. On montre que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{a}{N}\right)^k\left(\frac{N-a}{N}\right)^{n-k}.$$

Ce modèle est utilisé si on répète n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = a/N$.

Définition 8. Soit $p \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que la v.a.r. X suit la **loi Binomiale** de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 8. Un QCM de 10 questions avec 3 choix possibles (un seul étant correct) est proposé à un étudiant qui n'a pas révisé, et qui répond au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait :

a) 2 réponses exactes b) au moins 2 réponses exactes.

Propriété 8. Soit $p \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathrm{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple 9. On effectue n lancers d'un dé à six faces bien équilibré. Soit $\varepsilon > 0$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour n assez grand, la proportion de 6 est proche de $\dfrac{1}{6}$ à ε près avec une probabilité supérieure à $0,9$.

4 Couples de variables aléatoires finies et lois de probabilité

Dans cette partie X et Y sont des v.a.r. sur Ω, $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

4.1 Couples de variables aléatoires finies

Définition 9. On appelle **couple de variables aléatoires** (réelles) sur Ω toute application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.,$$

où X et Y sont des v.a.r. sur Ω. On note alors $Z = (X,Y)$.

Exemple 10. On lance deux dés tétraèdriques identiques et bien équilibrés, l'un vert et l'autre rouge. Dans chaque cas, déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $(X,Y)(\Omega)$:

1. X est le résultat du dé vert et Y celui du dé rouge.
2. X est le minimum des deux résultats et Y le maximum.

4.2 Loi conjointe

Définition 10. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur Ω.
On appelle **loi conjointe** des variables X et Y (ou loi du couple (X,Y)) l'application

$$\mathrm{P}_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega)\times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right) \end{array} \right. .$$

Exemple 11. On lance deux dés tétraédriques identiques et bien équilibrés, l'un vert et l'autre rouge. On note X le minimum des deux résultats et Y le maximum.

Déterminer la loi conjointe de X et Y. En déduire la loi de X et la loi de Y.

4.3 Lois marginales

Définition 11. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur Ω.

On appelle **première loi marginale** de (X,Y) la loi P_X, et **deuxième loi marginale** la loi P_Y.

Propriété 9. Si (X,Y) est un couple de v.a.r. sur Ω alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ P_X(x_i) = \mathrm{P}(X=x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}\left((X=x_i)\cap(Y=y_j)\right)$$

$$\forall j \in [\![1,m]\!],\ \ P_Y(y_j) = \mathrm{P}(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left((X=x_i)\cap(Y=y_j)\right)$$

Remarque : Si la connaissance de la loi du couple permet de connaître ses lois marginales, la connaissance des lois marginales ne permet pas d'en déduire celle du couple, en général.

Exemple 12. On tire successivement deux boules dans une urne contenant deux rouges et trois noires. On note X (resp. Y) la variable qui vaut 1 si la première (resp. la deuxième) boules tirée est rouge, 0 sinon.

Déterminer la loi du couple (X,Y) et ses loi marginales dans le cas d'un tirage sans remise puis dans le cas d'un tirage avec remise.

4.4 Lois conditionnelles

Définition 12. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur Ω.

Pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathrm{P}(Y=y) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de X sachant $(Y=y)$, l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe $\mathrm{P}_{(Y=y)}(X = x) = \dfrac{\mathrm{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathrm{P}(Y = y)}$.

On définit de même la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ de probabilité non nulle.

Exemple 13. Pour la situation de l'exemple 12 déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 1)$ dans le cas d'un tirage sans remise, puis dans le cas d'un tirage avec remise.

4.5 Covariance

Définition 13. On appelle **covariance** de deux v.a.r X et Y, et on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$, le nombre $E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$.
Lorsque cette covariance est nulle, on dit que les deux v.a.r sont **décorellées**.

Théorème 2. Pour toutes v.a.r X et Y,
$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5 Variables aléatoires finies indépendantes

5.1 Indépendance de deux variables aléatoires finies

Définition 14. On dit que les v.a.r. X et Y sont **indépendantes** si

pour tout (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Remarque : X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathrm{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y).$$

Dans ce cas, on peut obtenir la loi conjointe de (X, Y) à partir de ses lois marginales.

Exemple 14. Pour la situation de l'exemple 12 déterminer si les variables X et Y sont indépendantes dans le cas d'un tirage sans remise, puis dans le cas d'un tirage avec remise.

Propriété 10. (admise) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes alors les v.a.r. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Propriété 11. Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes alors
1. $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ 2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ 3. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque : La réciproque de la propriété précédente est fausse.

Exemple 15. Soit $X \sim \mathscr{U}([\![-1,1]\!])$ et Y l'indicatrice de l'événement $(X=0)$.

Montrer que $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

5.2 Indépendance de n variables aléatoires finies

Définition 15. Soient X_1, X_2,..., X_n des v.a.r. sur Ω.

On dit que X_1, X_2,..., X_n sont **indépendantes** si

$\forall (x_1,\dots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$,

$$\mathrm{P}((X_1=x_1)\cap\dots\cap(X_n=x_n)) = \mathrm{P}(X_1=x_1)\times\dots\times\mathrm{P}(X_n=x_n).$$

Remarque : Si $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes alors toute sous famille l'est aussi. En particulier, X_1, X_2,..., X_n sont deux à deux indépendantes.

Application : Soient n v.a.r X_i indépendantes, de même loi d'espérance m et d'écart type σ.

La v.a.r $M=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ a pour espérance m et pour écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

D' après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall a>0$, $P(|M-m|\geq a)\leq \dfrac{\sigma^2}{na^2}$

Interprétation fréquentiste : si $X_1,\dots,X_n$ sont les valeurs prises par une v.a.r X lors de n répétitions indépendantes d'une expérience, alors la probabilité que la moyenne observée des valeurs prises par X s'écarte de la moyenne théorique de plus d'un écart donné $a>0$ tend vers 0 lorsque le nombre n de répétitions tend vers l'infini.

Propriété 12. Si X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$ alors

$$X_1+X_2+\dots+X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$

Application : On retrouve ainsi facilement l'espérance d'une v.a.r. X de loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Lemme 2. des coalitions (admis) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions.

Si X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes alors $f(X_1,\cdots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\cdots,X_n)$ le sont aussi, pour tout $m\in[\![1,n]\!]$.