Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1

1. Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

   $\lambda u+\mu v=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')$

$$\begin{aligned}
& f_m(\lambda u+\mu v)\\
= \ & (\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+m(\lambda z+\mu z'),\lambda x+\mu x'+m(\lambda y+\mu y')+\lambda z+\mu z',\\
& \qquad m(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z')\\
= \ & \lambda(x+y+mz,x+my+z,mx+y+z)+\mu(x'+y'+mz',x'+my'+z',mx'+y'+z')\\
= \ & \lambda f_m(u)+\mu f_m(v).
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f_m\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

2. $\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, f_m est bijective ssi f_m est injective ssi $\mathrm{Ker}(f_m)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f_m)\iff f_m(x,y,z)=(0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+y+mz&=&0\\x+my+z&=&0\\mx+y+z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+y+mz&=&0\\(m-1)y+(1-m)z&=&0\\(1-m)y+(1-m^2)z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+y+mz&=&0\\(m-1)y+(1-m)z&=&0\\(2-m-m^2)z&=&0\end{array}\right.,$$

   qui est échelonné de rang 3 ssi $m-1\neq 0$ et $2-m-m^2\neq 0$ ssi $m\neq 1$ et $m\neq -2$.

   On en déduit que $\boxed{f_m \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ ssi } m\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}}$.

3. (a) Si $m=-2$, on a :

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f_{-2})\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+y-2z&=&0\\-3y+3z&=&0\\0&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&z\\y&=&z\end{array}\right.\iff u=z(1,1,1).$$

   Donc
   $\boxed{\mathrm{Ker}(f_{-2}) \text{ est la droite vectorielle de vecteur directeur } u_1=(1,1,1), \text{ de dimension } 1}$.

(b) Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f_{-2})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f_{-2})) = 3 - 1 = 2$.

$f_{-2}(1,0,0) = (1,1,-2) = v_1$ et $f_{-2}(0,1,0) = (1,-2,1) = v_2$, qui ne sont pas colinéaires.

Donc $\mathrm{rg}(v_1, v_2) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f_{-2}))$ et
$\boxed{\mathscr{B}_1 = (v_1, v_2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f_{-2}), \text{ de dimension } 2}$.

(c) On considère la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de u_1, v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

qui est échelonnée de rang 3. Donc $\mathrm{rg}(u_1, v_1, v_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et
$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u_1) \oplus \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Ker}(f_{-2}) \oplus \mathrm{Im}(f_{-2})}$.

(d) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique $w_1 \in \mathrm{Ker}\,(f_{-2})$ et un unique $w_2 \in \mathrm{Im}(f_{-2})$ tels que $(x,y,z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2$ d'après les questions précédentes et $p(x,y,z) = w_1$

$$(x,y,z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vu que A est inversible.

L'algorithme de Gauss Jordan (à faire) donne $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et on obtient $a = \dfrac{x+y+z}{3}$, d'où $\boxed{p(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{3}(1,1,1)}$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 2

1. Puisque tout est distinguable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit $\boxed{4^5 = 1024 \text{ rangements possibles au total.}}$
2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite), soit $\boxed{\text{une probabilité de } \dfrac{4}{4^5} = \dfrac{1}{4^4}}$
3. Commençons par choisir les deux boites non vides, il y a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibilités.

Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules).

Cela fait donc finalement $6 \times (2^5 - 2)$ cas favorables, soit

$\boxed{\text{une probabilité de } \dfrac{6 \times 30}{4^5} = \dfrac{45}{4^4}}$

4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boite vide : 3, 1, 1, 0 ou 2 , 2 ,1 , 0. Dans le premier cas, il faut choisir la boite contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ = 10 choix), la boite contenant la quatrième boule (3 choix) et la boite contenant la dernière boule (2 choix).

   Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions 3, 1, 1, 0.

   Pour les 2 , 2 ,1 , 0, il y a 4 choix pour la boite contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boite, 3 choix pour la boite vide, et enfin $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boites restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités.

   Finalement $\boxed{\text{la probabilité d'avoir exactement une boite vide est de } \dfrac{240 + 360}{4^5} = \dfrac{75}{2^9}}$

   Autre correction On a 4 façons de choisir la boite vide. Ensuite on rempli les 3 autres ce qui fait 3^5 façons, en enlevant les 3 possibilités pour lesquelles 1 seule boite est remplie sur ces 3 et aussi les $3(2^5 - 2)$ possibilités pour les quelles il y aurait une boite vide exactement parmi ces 3.

   On obtient $4[3^5 - 3 - 3(2^5 - 2)] = 600$ possibilités, à diviser par 4^5

5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boite vide. Comme on ne peut pas avoir quatre boites vides, la probabilité de ne pas avoir de boite vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut

   $\boxed{\dfrac{1024 - 4 - 180 - 600}{1024} = \dfrac{15}{64}}$

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$. Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. (a) $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$, donc $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2 + x + o(x)} \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + o(x)}$.

   $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{2} + o(x)\right) = 0$, et $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$.

   Donc, par composition, $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} \times \left(1 - \dfrac{x}{2} + o(x)\right) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)}$.

(b) On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet pour tangente en 0 la droite $\boxed{\mathcal{T}_0 :\ y = \dfrac{x}{2}}$.

(c) De plus, $f(x) - \dfrac{x}{2} \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{4} + o(x^2) \leq 0$, au voisinage de 0.

Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se situe en dessous de sa tangente } \mathcal{T}_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$, par croissance comparée et opérations sur les limites.

(b) Donc $\boxed{\text{l'axe des abscisses est asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty}$.

(c) De plus, $\forall x > 0,\ f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, car $\mathrm{e}^x > 0$.

Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de l'axe des abscisses au voisinage de } +\infty}$.

4. (a) $\forall x < 0,\ \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$, par opérations sur les limites. Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x}$.

(b) $f(x) - x = \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x} - x = \dfrac{-x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\mathrm{e}^x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 0$ et $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty}$.

(c) De plus, $\forall x < 0,\ f(x) - x = \dfrac{-x\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, car $\mathrm{e}^x > 0$ et $-x > 0$.

Donc $\boxed{\text{La } \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de son asymptote au voisinage de } -\infty}$.