Devoir surveillé n° 6

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.

La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **6 points** : 1 point par question.

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+mz, x+my+z, mx+y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f_m est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Dans cette question, $m = -2$.
   (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f_{-2})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f_{-2})$.
   (c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f_{-2})$ et $\mathrm{Im}(f_{-2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (d) Écrire l'expression analytique de la projection p sur $\mathrm{Ker}(f_{-2})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f_{-2})$.

Exercice 2 **6 points** : **1.** 0.5 **2.** 1 **3.** 1,5 **4.** 2 **5.** 1

On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boites également numérotées.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
3. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
4. Quelle est la probabilité qu'une seule boite soit vide ?
5. En déduire la probabilité qu'aucune boite ne soit vide.

Exercice 3 **8 points** : **1.** 0.5 **2. (a)** 2 **2. (b)** 0,5 **2. (c)** 0,5 **3. (a)** 1 **3. (b)** 0,5 **3. (c)** 0,5 **4. (a)** 0,5 **4. (b)** 1 **4. (c)** 1

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que $f(x) \underset{x \to 0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)$.
   (b) En déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.
   (c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$.
   (c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
4. (a) Montrer que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x$.
   (b) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $-\infty$.
   (c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $-\infty$.