Correction du devoir maison n° 23

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, et l'application f définie sur E par $f(P) = (X+1)P' - P$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$, puis déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$. L'application f est-elle bijective ?

   Correction : Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   On a $\deg(P') \leq 2$, $\deg((X+1)P') \leq 3$, $\deg((X+1)P' - P) \leq 3$ et donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

   De plus,

   $$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (X+1)(P+\lambda Q)' - (P+\lambda Q) \\ &= (X+1)P' + \lambda(X+1)Q' - P' - \lambda Q' \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

   Donc, finalement, $\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])}$.

   Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On a $f(1) = -1$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X$ et $f(X^3) = 2X^3 + 3X^2$, donc

   $$\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

   A est une matrice triangulaire supérieure avec un coefficient diagonal nul nul donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 3 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

   Remarque : $(f(X), f(X^2), f(X^3)) = (1, X^2+2X, 2X^3+3X^2)$ est libre (polynômes non nuls de degrés échelonnés), de rang $3 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Donc c'est un base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X^2+2X, 2X^3+3X^2)$.

   Autre correction $f(X) + f(1) = 0$ donc $f(X+1) = 0$ et $X+1 \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ et f n'étant pas injective, n'est pas bijective.

   Remarque : Si on a montré que $\mathrm{rg}\, f = 3$, on peut en déduire que $\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension 1 et on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X+1)$.

2. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de E. Déterminer la matrice A' de f dans celle-ci.

Correction : $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est libre (polynômes non nuls de degrés échelonnés), de rang $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

Donc $\boxed{\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

Par linéarité, on a $f(1) = -1$, $f(X-1) = f(X) - f(1) = 2$,

$f((X-1)^2) = f(X^2) - 2f(X) + f(1) = X^2 + 2X - 3 = (X-1)^2 + 4X - 4 = (X-1)^2 + 4(X-1)$,

$$\begin{aligned} f((X-1)^3) &= f(X^3) - 3f(X^2) + 3f(X) - f(1) \\ &= 2X^3 - 6X + 4 \\ &= 2(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + 6X^2 - 12X + 6 \\ &= 2(X-1)^3 + 6(X-1)^2. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Donner une relation entre A, A' et P. Vérifier ce résultat sans calculer P^{-1}.

Correction : $(X-1)^2 = X^2 - 2x + 1$ et $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Par la formule de changement de base, on a $\boxed{A' = P^{-1}AP}$, ce qui équivaut à $PA' = AP$.

On vérifie que $PA' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = AP$.