Correction du devoir maison n° 22

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. **Quelques proriétés de F sur $\mathbb{R}_+^*$**

   (a) $\forall x > 0$, $1 + x^2 > 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Ainsi,
   $\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = f(x)}$.

   (b) f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $F' = f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{F \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)}$.

   (c) Soit $x > 0$ fixé. On pose $u = \dfrac{1}{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Si $t = 1$ alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = 1/x$.

   De plus, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ donc $-\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

   Par changement de variable dans l'intégrale, on obtient :
   $$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u = F\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}$.

   (d) $F(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.

   Soit $x > 1$ fixé. On a : $\forall t \in [1, x]$, $f(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$.

   Donc, par positivité de l'intégrale, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \geq 0$, $\forall x > 1$.

   Si $0 < x < 1$ alors $\dfrac{1}{x} > 1$ et $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$.

   Par disjonction des cas, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \geq 0}$.

2. **Étude de F aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$**

(a) φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x > 0,\ \ \varphi(x) = \dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1 = \varphi(0).$

Donc φ est continue en 0. Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+}$.

(b) Soit $x > 0$ fixé. On a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

On pose $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \ln t$, $u(t) = \arctan t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$F(x) = \Big[\arctan(t)\ \ln(t)\Big]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t = \arctan(x)\ \ln(x) - \int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t}$.

(c) On a vu que $\dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Donc $\arctan x\ \ln x \underset{x\to 0}{\sim} x\ \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée.

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème du calcul intégral, $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \phi(t)\mathrm{d}t$, est l'unique primitive de φ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 1. Donc ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable).

Donc $\phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \phi(0)$, donc $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_1^0 \phi(t)\mathrm{d}t.$

Finalement, $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 - \displaystyle\int_1^0 \phi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t.$

Donc $\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$, et on pose $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t.$

(d) F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0,\ F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, par opérations sur les limites.

D'après le théorème de la limite de la d'erivée :

$\boxed{F \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0 \text{ et } \Gamma \text{ admet une demi tangente verticale en } 0}$.

(e) On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$X = \dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $F(X) \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$.

Donc $F\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$, par composition.

Donc $\boxed{F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t = F(0)}$.

3. **Approximation des valeurs de F**

(a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = t^k$ et $v(t) = \ln(t)$, $u(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}\ln(t)}{k+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x.$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ I_k(x) = \dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}}$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k \underset{-x^2\neq 1}{=} \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) \quad &= \quad \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{linéarité}}{=} \int_1^x \ln(t)\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \\
&\underset{3.(b)}{=} \int_1^x \ln(t)(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t}.$$

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$ fixés. Comme $x < 1$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \quad &= \quad \left|-(-1)^{n+1}\int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_x^1 \ln(t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_x^1 |\ln(t)|\frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \\
&\leq \int_x^1 (-\ln(t))\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

car $\ln(t) < 0$ sur $]0,1[$ et $2n+2$ est un entier naturel pair.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\quad \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq \int_1^x \ln(t) \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \mathrm{d}t = I_{2n+2}(x)}$.

(e) Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

F est continue en 0 donc $F(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} F(0)$. Vu le résultat de la question question 3.(a),

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(k+1)^2}$, par croissance comparée.

Donc, en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ |F(0) - w_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}}$.