Correction du Test n° 22

Sujet A

1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$

   D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

   Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+}{\sim} \frac{\pi}{4n}}$

3. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

   $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et

   $\dfrac{1}{\mathrm{i}+1} = b\mathrm{i}+c \Leftrightarrow \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = b\mathrm{i}+c \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = \dfrac{1}{2}$

   $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{-x+1}{2(x^2+1)} = \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{-x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

   $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + c}$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y,z)\big) = (x+2y+3z, y+2z)$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array}\right.$

   Ker A = Vect $(1,-2,1)$ puis rg $A = 2$ d'après le théorème du rang. Or Im A est un sev de $\mathbb{R}^2$, donc Im $A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

   On peut aussi dire que Im A = Vect $((1,0),(2,1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Correction du Test n° 22

Sujet B

1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

   D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

   Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+}{\sim} \sqrt{n}(2\sqrt{2}-2)}$

3. Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+1)}$

   $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ avec $a = \dfrac{1}{5}$ et

   $\dfrac{1}{\mathrm{i}+2} = b\mathrm{i} + c \Leftrightarrow \dfrac{2-\mathrm{i}}{5} = b\mathrm{i} + c \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{5}$ et $c = \dfrac{2}{5}$

   $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{1}{5(x+1)} + \dfrac{-x+2}{5(x^2+1)} = \dfrac{1}{5(x+1)} + \dfrac{-x}{5(x^2+1)} + \dfrac{2}{5(x^2+1)}$

   $$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\arctan x + c}$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y,z)\big) = (x+y+4z, y+2z)$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+4z = 0 \\ y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases}$

   Ker A = Vect $(-2,-2,1)$ puis rg $A = 2$ d'après le théorème du rang.Or Im A est un sev de $\mathbb{R}^2$, donc Im $A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

   On peut aussi dire que Im A = Vect $((1,0),(1,1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.