Samedi 23 septembre 2023

Devoir surveillé n° 1

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 (6.5 points : 1) 3x0.5 2) a) 1 b) 1 3) a) 1.5 b) 1.5)

1. Posons $\alpha = \dfrac{115\pi}{6}, \beta = -\dfrac{55\pi}{8}$ et $\gamma = \dfrac{101\pi}{12}$. En détaillant vos calculs, évaluer les cosinus et sinus de ces trois angles.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

   b) $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   b) $\tan(2x) \geq -1$

Exercice 2 (6.5 points : 1) 3×0.5 2) 6×0.5 3) a) 0.5 b) 0.5 c) 1)

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :
   $a = \dfrac{(2-\mathrm{i})^2}{1+2\mathrm{i}} \quad b = \dfrac{5+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} \quad c_n = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants (où x est un paramètre réel) :
   $a = \frac{3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}, b = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9, \mathrm{c} = -\mathrm{a}, d = \frac{-3b}{\mathrm{i}a^2}, \mathrm{e} = \sin(\mathrm{x}) - \mathrm{i}\cos(\mathrm{x})$ et $f = \frac{1-\mathrm{i}\tan(x)}{1+\mathrm{i}\tan(x)}$
3. Posons $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2i$. a) Évaluer $P(\mathrm{i})$.

   b) En déduire une factorisation de P.

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3 (7 points :1) 2x0.5 2) 4x0.25+2x0.5 3) a) 0.5+0.5 b) 1 c) 1 d) 0.5 e) 0.5) Soit ρ un réel strictement positif et θ un angle compris entre 0 et π i.e. $\rho > 0$ et $\theta \in [0, \pi]$. On s'intéresse dans cet exercice à la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $z_0 = \rho e^{i\theta}$ qui satisfait à la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. Cas extrêmes Décrire la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 0$? Puis lorsque $\theta = \pi$?
2. Petite exploration Évaluer, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, les quatre premiers termes z_0, z_1, z_2, z_3 de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme exponentielle. Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \simeq 0.71, \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \simeq 0.92$ et $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \simeq 0.98$, placer les points d'affixes z_0, z_1, z_2, z_3 sur le plan complexe. Que peut-on conjecturer ?

3. Étude générale On suppose dorénavant que $\theta \in]0,\, \pi[$.

a) Montrer que la suite de ses modules $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante puis convergente.

b) Vérifier par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = \rho e^{\frac{i\theta}{2^n}} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$.

c) Montrer également que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

d) En déduire la limite de $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (Cf a)). (On rappelle que $\dfrac{\sin(X)}{X}$ tend vers 1 lorsque X tend vers 0).

e) Vers quoi tend la suite $(\mathrm{Arg}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des arguments de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $\theta \in]\,0, \pi[$.