Correction du concours blanc n° 2
Partie 1

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}
S_{2(N+1)} - S_{2N} &= S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+1} + u_{2N+2} = -\frac{1}{6N+4} + \frac{1}{6N+7} < 0\\
S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} &= S_{2N+3} - S_{2N+1} = u_{2N+2} + u_{2N+3} = \frac{1}{6N+7} - \frac{1}{6N+10} > 0\\
S_{2N+1} - S_{2N} &= u_{2N+1} = -\frac{1}{6N+4} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(S_{2N}) est décroissante, (S_{2N+1}) est croissante et $S_{2N+1} - S_{2N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\boxed{\text{les suites } (S_{2N}) \text{ et } (S_{2N+1}) \text{ sont adjacentes.}}$

2. D'après le théorème de convergence des suites adjacentes, (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent et ont la même limite $S \in \mathbb{R}$. Or $(S_N) = (S_{2N}) \cup (S_{2N+1})$

On en déduit que la suite (S_N) converge vers S et donc $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge.}}$

3. $\displaystyle\int_0^1 (-x^3)^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 = u_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (-x^3)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^n x^{3n} \mathrm{d}x = \left[\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{3n+1} - 0 = u_n.$$

Donc $\boxed{u_n = \displaystyle\int_0^1 (-x^3)^n \mathrm{d}x \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-x^3)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (\underbrace{-x^3}_{\neq 1})^n \mathrm{d}x \ \text{ et}\\
S_N &= \int_0^1 \frac{1-(-x^3)^{N+1}}{1-(-x^3)} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_N = I - J_N, \text{ où } I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \mathrm{d}x \text{ et } J_N = \int_0^1 \frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3} \mathrm{d}x}$

5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|J_N| \leq \int_0^1 \left|\frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{\frac{(x^3)^{N+1}}{1+x^3}}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{3N+3}}{1+x^3} \mathrm{d}x$$

Pour tout $x \in [0,1]$ on a $x^3 \geq 0$ donc $1+x^3 \geq 1$ et $\dfrac{x^{3N+3}}{1+x^3} \leq x^{3N+3}$.

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq |J_N| \leq \int_0^1 x^{3N+3}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{3N+4}}{3N+4}\right]_0^1 = \frac{1}{3N+4} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} J_N = 0}$ par encadrement.

6. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a $x+1 \neq 0$, $x^2-x+1 \neq 0$ ($\Delta = -3 < 0$) et $(1+x^3) = (x+1)(x^2-x+1)$donc $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

   En multipliant par $x+1$ puis en remplaçant x par -1, on obtient $a = \dfrac{1}{3}$

   Pour le calcul de b et c,

   • on peut remplacer x par 0 ce qui donne $a+c=1$ et multiplier par x puis prendre les équivalents en $+\infty$, on obtient $a+b=0$. D'où $\boxed{a = \dfrac{1}{3} \quad b = -\dfrac{1}{3} \text{ et } c = \dfrac{2}{3}}$

   • ou on peut utiliser les complexes :

   En multipliant par x^2-x+1 et en remplaçant x par $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ on obtient

   $\dfrac{1}{\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}+1} = b\,\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + c \Leftrightarrow \dfrac{2}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}} = b\,\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + c \Leftrightarrow$

   $\dfrac{2(3-\mathrm{i}\sqrt{3})}{12} = b\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} + c \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{3}$ puis $c = \dfrac{1-b}{2} = \dfrac{2}{3}$

   On peut aussi tout mettre au même dénominateur et résoudre le système.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ \dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3}.\dfrac{x-2}{x^2-x+1}}$.

7. On en déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}.\frac{2x-4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} - 2\sqrt{3}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right]\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{6}\ln(|x^2-x+1|) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ donc $\boxed{I = \lim_{n\to+\infty S_n} = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$

Exercice 2 $I =]0;+\infty[$ et $h(t) = \left(t+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$

1. (a) $\forall t>0$, $1+1/t>0$ et $t\neq 0$. Donc $h\in\mathscr{C}^2(I)$ comme produit de composées de fonctions de classes $\mathscr{C}^2$.

   (b) $\lim_{t\to 0_+}\left(t+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t\to 0_+}\left(1+\frac{1}{t}\right) = +\infty$ donc $\lim_{t\to 0_+} h(t) = +\infty$ par composition et produit de limites.

   Cette limite n'étant pas finie, h n'est pas prolongeable par continuité en 0_+.

   (c) Pour tout $t>0$,

   $$\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)' = \frac{\frac{-1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2+t}$$

   $$h'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + \left(t+\frac{1}{2}\right)\times\frac{-1}{t^2+t} = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{2t+1}{2(t^2+t)} \text{ et}$$

   $$h''(t) = -\frac{1}{t^2+t} - \frac{1}{2}\frac{2(t^2+t)-(2t+1)^2}{(t^2+t)^2} = \frac{1}{2(t^2+t)^2}$$

   Donc $\boxed{\forall t\in I,\ h'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{2t+1}{2t^2+2t} \text{ et } h''(t) = \frac{1}{2(t^2+t)^2}}$

   (d) $\frac{1}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t}$ et $h(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t}\left(t+\frac{1}{2}\right) = 1+\frac{1}{2t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

$\dfrac{2t+1}{2t^2+2t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{2t^2} = \dfrac{1}{t}$ donc $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

Finalement on a $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

(e) $\forall t \in I$, $2(t^2+t)^2 > 0$ donc $h''(t) = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2} > 0$

Donc h' est croissante sur I, et $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\boxed{\forall t \in I,\ h'(t) \leq 0}$

(f) Donc h est décroissante sur I, et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\boxed{\forall t \in I,\ h'(t) \geq 1}$

(g) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition,

$h(t) \underset{+\infty}{=} \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{3t^3} + o\left(\dfrac{1}{t^3}\right)\right]$

Donc $h(t) \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{12t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\boxed{h(t) - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12t^2}}$

2. (a) $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ pour tout n, donc $\boxed{\text{la suite } (\sigma_n) \text{ est croissante.}}$

(b) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$ et pour tout $x \in [k, k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

et en intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$, de largeur 1 on obtient

$$\boxed{\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}}$$

(c) En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n puis en utilisant la relation de Chasles pour la somme des intégrales, on obtient

$\sigma_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sigma_n$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Donc

$\sigma_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} + \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} + \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^{n+1} = 2 - \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n+1} \leqslant 2$

La suite (σ_n) est alors croissante et majorée par 2 donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!\mathrm{e}^n(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)!\mathrm{e}^n \times \mathrm{e}}$

Donc $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\boxed{\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1}$

(b) D'après le résultat de la question 1. (e), $\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$

De plus $h(n) - 1 \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$ d'après la question 1. (f)

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers un réel } S}$, car tout est positif.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\ln(v_k) - \ln(v_{k+1})] = \ln(v_1) - \ln(v_{n+1})$, comme somme télescopique. Comme $v_1 = \mathrm{e}$, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ S_n = 1 - \ln(v_{n+1})}$

Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(v_n) = 1 - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - S$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } C = \mathrm{e}^{1-S} > 0}$

(d) On en déduit que $v_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C$.

Par produit, $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{Cn^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}}$

(e) On en déduit que $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C^2n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}$

Par quotient on obtient $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C\sqrt{n}}{\sqrt{2} \times 4^n}$

Par la formule (F), en multipliant par $\sqrt{2} \times 4^n/\sqrt{n}$, on obtient $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$

(f) En utilisant les deux résultats précédents, on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$

On en déduit la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$