Concours blanc n° 2

La partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 et Partie 2 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Partie 1

Exercice 1 **7 points** : **1.** 1.5 **2.** 0.5 **3.** 1 **4.** 0.5 **5.** 1 **6.** 1 **7.** 1.5

On considère la suite (u_k) définie par $u_k = \dfrac{(-1)^k}{3k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente.
3. Vérifier que $u_k = \displaystyle\int_0^1 (-x^3)^k \mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $S_n = I - J_n$, où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}\mathrm{d}x$.
5. Par majoration de $|J_n|$, démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
6. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$
7. En déduire la valeur de la limite de la suite (S_n)

Exercice 2 **13 points** : **1.(a)** 0.5 **1.(b)** 0.5 **1.(c)** 1.5 **1.(d)** 1 **1.(e)** 0.5 **1.(f)** 0.5 **1.(g)** 1.5 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 1 **2.(c)** 1.5 **3.(a)** 0.5 **3.(b)** 0.5 **3.(c)** 1 **3.(d)** 0.5 **3.(e)** 1 **3.(f)** 0.5

1. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par

$$h(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

   (a) Justifier que la fonction h est de classe c^2 sur l'intervalle I.

   (b) Étudier le prolongement par continuité de h en 0.

   (c) Déterminer les dérivées premières et secondes h' et h'' de h.

   (d) Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions h et h'.

(e) Montrer que $\forall t \in I, \quad h'(t) \leq 0$.

(f) En déduire que $\forall t \in I, \quad h(t) \geq 1$.

(g) Montrer que $h(t) - 1 \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{12t^2}$.

2. On considère la suite (σ_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

(a) Démontrer que la suite (σ_n) est croissante.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

(c) En déduire que la suite (σ_n) converge.

3. On considère à présent la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = h(n) - 1$, où h est la fonction étudiée à la question 1.

(b) On admet la propriété suivante :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n > 0$ à partir d'un rang p alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k\right)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=p}^{n} v_k\right)$ converge.

Déduire de la question précédente la convergence de la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)$$

(c) Après avoir établi que pour $n \geq 1$, $S_n = 1 - \ln(u_{n+1})$, montrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive C.

(d) En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $n!$ en fonction de puissances de n, de l'exponentielle et de C.

(e) On admet la formule (F) suivante : (F) : $\quad \sqrt{\pi} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$.

Á l'aide de cette formule, calculer C en fonction de π.

(f) En déduire la formule de Stirling : $\qquad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Partie 2

Exercice 1 **6 points** : **1.** 1 **2.** 0.5 + 0.5 **3.** 0.5 **4.** 3 × 0.5 **5.** 1 **6.** 1

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormé direct. Tout point P est représenté par son affixe z_P.

1. Soient P, Q, R trois points du plan. Quelle relation doivent satisfaire z_P, z_Q, z_R pour que le triangle PQR soit direct, rectangle et isocèle en P ?

Soit ABC un triangle direct. Construisons, à l'extérieur de ce triangle, les triangles ARC et BSC isocèles et rectangles respectivement en R et S. Notons T le milieu de [AB].

2. Représenter les points A, B, C, R, S et T lorsque $z_A = 0, z_B = 3$ et $z_C = 2 + 2\mathrm{i}$. Donner leurs affixes.
3. Vérifier que le triangle RTS est isocèle et rectangle en T.

   Le triangle direct ABC est par la suite quelconque.
4. Écrire (i) l'équation liant z_A, z_R et z_C, (ii) l'équation liant z_B, z_S et z_C, (iii) l'équation liant z_A, z_T et z_B.
5. Résoudre le système linéaire aux inconnues z_R, z_S et z_T composé des équations de la question 4.
6. Prouver que le triangle RTS est systématiquement direct isocèle et rectangle en T.

Exercice 2 **10 points** : **0.** 0.5 **A** **1.** 0.5 **2.** 0.5 + 0.5 **3.** 0.5+0.5 **B** **1.** 1 **2.** 0.5+0.5 **3.** 0.5 + 0.5 **C** **1.** 0.5 **2.** 0.5 **3.** 0.5 + 1 **D** **1.** 0.5 **2.** 0.5 **3.** 0.5

Pour tout réel $a > 0$, notons Δ_a l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\Delta_a(P)(X) = \frac{1}{2a}(P(X+a) - P(X-a))$$

0. Montrer que la limite de $\Delta_a(P)(X)$ lorsque a tend vers 0 est $P'(X)$.

De fait, cet opérateur joue le rôle d'une dérivée discrète.

A - Étude globale

1. Montrer que Δ_a est un endomorphisme.
2. Évaluer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de $\Delta_a(X^n)$.
3. En déduire $\ker(\Delta_a)$ le noyau de Δ_a ainsi que son image $\mathrm{Im}(\Delta_a)$.

B - Une restriction Notons Δ_a^4 la restriction de Δ_a à $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Écrire la matrice représentative M_a de Δ_a^4 dans la base canonique $\mathcal{B}_4 = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Quel est son noyau ? Est-ce un automorphisme ?

3. Donner le rang de Δ_a^4 et expliciter son image.

C - Régularisation

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes s'annulant en 0 . Montrer qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel admettant $\mathcal{B}_4^* = \left(X, X^2, X^3, X^4\right)$ comme base.
2. Notons Δ_a^* la restriction de Δ_a à E. Expliquer pourquoi $\Delta_a^* : E \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ est un isomorphisme.
3. Écrire puis inverser sa matrice représentative M_a^* dans le couple de bases $(\mathcal{B}_4^*, \mathcal{B}_3)$ où $\mathcal{B}_3 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Note : On obtient tout particulièrement que $(\Delta_a^*)^{-1}\left(X^2\right) = \dfrac{1}{3}X^3 - \dfrac{a^2}{3}X$.

D - Primitive discrète

Posons maintenant $a = \dfrac{1}{2}$ de sorte que $\Delta_{\frac{1}{2}}(P)(X) = P\left(X + \dfrac{1}{2}\right) - P\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.

1. Évaluer par télescopage la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[P\left(k + \frac{1}{2}\right) - P\left(k - \frac{1}{2}\right)\right]$
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$. En introduisant un antécédent P de Q par $\Delta_{\frac{1}{2}}$, simplifier à l'aide de la question **D** 1. la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Q(k)$.
3. Retrouver ainsi la formule usuelle donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ (on pourra utiliser la note de la section **C**).

Exercice 3 **4 points** : **1.** 1 **2.** 1 **3.** 1 **4.** 0.5+0.25+.25

Une compagnie aérienne québécoise, en difficulté sur l'un de ses vols court-courrier décide d'analyser l'évolution des réservations sur ce vol. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi :

• Elle est libre au jour de date 0 (jour d'ouverture des réservations),

• si elle est libre au jour de date n, il n'y a que 5 % de chances qu'elle soit réservée au jour de date $n+1$.

• En revanche, si elle est réservée au jour de date n, il y a 95 % de chances qu'elle le demeure au jour de date $n+1$.

L'avion peut transporter 30 passagers. Pour que le vol soit financièrement rentable, l'avion doit décoller au moins à moitié plein.

Notons p_n la probabilité qu'une place donnée soit réservée au jour de date n. Notons également N_n le nombre de places réservées au jour de date n.

1. Exprimer, en explicitant toutes les règles de calcul utilisées, p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (expliquer votre démarche).
3. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini ?
4. Quelle loi suit la variable N_n ? Identifier la source des difficultés rencontrées par la compagnie. Quelle solution pourrions nous lui suggérer ?