Devoir de vacances

L'un des premiers chapitres que nous aborderons à la rentrée concernera les nombres complexes. Il est vivement conseillé à ceux n'ayant pas suivi l'enseignement de mathématiques expertes de prendre connaissance du cours, même si nous reprendrons tout le programme de terminale.

Par exemple, vous pouvez regarder les vidéos d'Yvan Monka
Un résumé complet du cours https://www.youtube.com/watch?v=ABo2m52oEYw

Des exercices d'application immédiate du cours
Écrire un nombre complexe sous forme algébrique (1)
https://www.youtube.com/watch?v=-aaSfL2fhTY
Écrire un nombre complexe sous forme algébrique (2)
https://www.youtube.com/watch?v=1KQIUqzVGqQ
Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (1)
https://www.youtube.com/watch?v=zIbpXlgISc4
Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique (2)
https://www.youtube.com/watch?v=RqRQ2m-9Uhw
Utiliser la forme exponentielle d'un nombre complexe
https://www.youtube.com/watch?v=8EVfyqyVBKc

Il est demandé de rédiger le plus rigoureusement possible le plus grand nombre de questions des deux exercices suivants. Ce travail est l'occasion de faire le point sur certains de vos acquis. Une correction vous sera donnée à la rentrée.

Très bonnes vacances !

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\cos(x)}.$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Démontrer que la fonction f est paire et 2π périodique.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_a à la courbe C au point A d'abscisse a, où a est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
4. Démontrer que la tangente T_a passe par l'origine si, et seulement si, $a\sin(a) = 1$.

5. On considère la fonction φ définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par $\varphi(x) = \sin(x) - \dfrac{1}{x}$.
   (a) Étudier les variations de la fonction φ' sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
   (b) On admet qu'il existe une unique valeur x_0 appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ telle que $\varphi'(x_0) = 0$ avec $\dfrac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.
   En déduire les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
6. Quel est le nombre de tangentes à la courbe C passant par l'origine ?

Exercice 2 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $\mathrm{u}_0 = 1$,

$$\mathrm{u}_{n+1} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{u}_n^2 + 2\mathrm{u}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{v}_n = \mathrm{u}_n - 2$$

pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que $\mathrm{v}_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{v}_n^2$ pour tout entier naturel n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel$n$, $-1 \leq \mathrm{v}_n \leq 0$.
3. Déduire des deux questions précédentes les variations de la suite (v_n).
4. Peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. Déterminer la limite de (v_n) et en déduire celle de (u_n) .