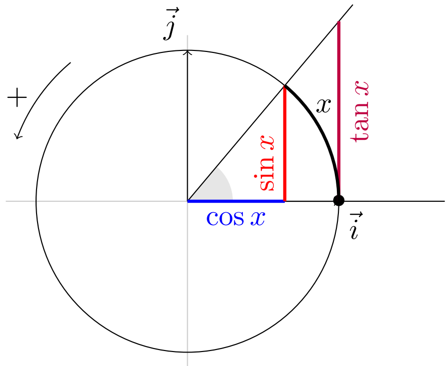
Trigonométrie

1 Le cercle trigonométrique



Dans un repère orthonormé du plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique.

Á tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on associe le point M de $\mathscr{C}$ par "enroulement" de la droite réelle dans le sens direct si $\theta \geq 0$, ou dans le sens indirect si $\theta < 0$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure θ (en radians), mais aussi $\theta' = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Un tel nombre θ' est dit congru (ou égal) à θ modulo 2π, ce que l'on notera $\theta' = \theta\ [2\pi]$.

L'abscisse de M est appelée cosinus de θ et notée $\cos\theta$.
L'ordonnée de M est appelée sinus de θ et notée $\sin\theta$.

Propriété 1. $M(x, y) \in \mathscr{C} \iff \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (paramétrage de $\mathscr{C}$).

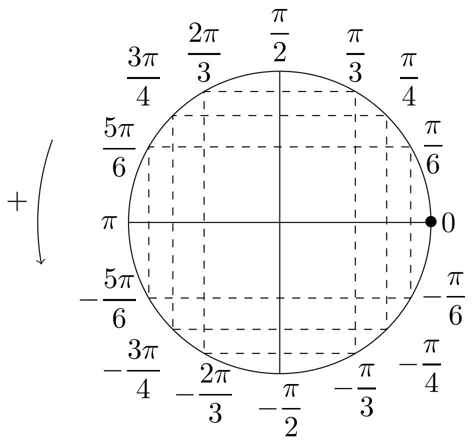
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.

Définition 1. Soit M un point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos\theta\ ;\ \sin\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Si la droite (OM) n'est pas verticale, sa pente est appelée **tangente** de θ et notée $\tan\theta$.

2 Formulaire de trigonométrie

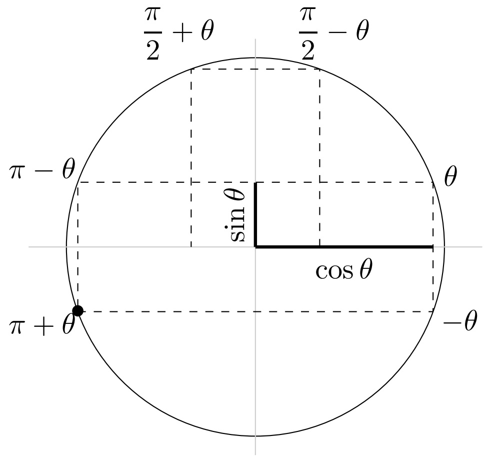
Propriété 2. Relations fondamentales

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\quad -1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1 \quad$ et $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad$ et $\quad 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$



Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini



Propriété 3. Angles associés Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

1. $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta \qquad \sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$
2. $\cos(-\theta)=\cos\theta, \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta \quad$ et $\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$
3. $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \qquad \sin(\theta+\pi)=-\sin\theta \quad$ et $\quad \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$
4. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta)=\sin\theta \quad$ et $\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
5. $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \quad$ et $\quad \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$
6. $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta \qquad \sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta \quad$ et $\quad \tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan\theta}$

Propriété 4. Équations trigonométriques Pour tout $a, x \in \mathbb{R}$,

1. $\cos x=\cos a \iff [(x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$ ou $(x=-a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})]$
2. $\sin x=\sin a \iff [(x=a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$ ou $(x=\pi-a+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z})]$
3. $\tan x=\tan a \iff (x=a+k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

Exemple 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $2\cos x = -1$ b) $\sin x = 1$ c) $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$
d) $3\tan x + \sqrt{3} = 0$ e) $2\sin x - 1 > 0$.

Propriété 5. Formules d'addition Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, si tout est défini,

1. $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$
2. $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$ $\sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'$
3. $\tan(\theta + \theta') = \dfrac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'}$ $\tan(\theta - \theta') = \dfrac{\tan\theta - \tan\theta'}{1 + \tan\theta\tan\theta'}$.

Propriété 6. Formules de duplication Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, si tout est défini,

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Exemple 2. Fondamental Linéariser $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$.

Exemple 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $\cos(2x) = \cos x$ b) $\cos(2x) = \sin(x)$

Propriété 7. Transformation d'un produit en somme Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')\right] \qquad \sin\theta\sin\theta' = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta')\right]$$

$$\sin\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\left[\sin(\theta + \theta') + \sin(\theta - \theta')\right]$$

Exemple 4. Soit un entier $n \geq 2$. Calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \cos(nt)\mathrm{d}t$

Propriété 8. Transformation d'une somme en produit Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Exemple 5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos x + \cos(2x)$

Exemple 6. a) Calculer $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}}$ b) En déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$