Correction du devoir de vacances

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et $x + 2\pi \in \mathbb{R}$
   De plus, $f(-x) = e^{-\cos(-x)} = e^{-\cos(x)} = f(x)$ car la fonction cosinus est paire, donc la fonction f est paire.
   $f(x+2\pi) = e^{-\cos(x+2\pi)} = e^{-\cos(x)}$ car la fonction cosinus est 2π périodique donc la fonction f est 2π périodique.
2. $f'(x) = u'e^u = \sin x e^{-\cos(x)}$.
   $e^{-\cos(x)} > 0$ pour tout x donc f' est du signe de $\sin x$ qui est positif sur $[0\ ;\ \pi]$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	e

3. Soit a est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
   $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   $T_a : y = \sin a e^{-\cos(a)}(x-a) + e^{-\cos(a)} = \sin a e^{-\cos(a)} x - a \sin a e^{-\cos(a)} + e^{-\cos(a)} = \sin a e^{-\cos(a)} x + e^{-\cos(a)}(1 - a\sin a)$
4. T_a passe par l'origine si, et seulement si,
   $e^{-\cos(a)}(1 - a\sin a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a\sin a = 0$ car $e^{-\cos(a)} > 0$ pour tout a
   $\Leftrightarrow a\sin(a) = 1$.
5. On considère la fonction φ définie sur $]0\ ;\ \pi]$ par $\varphi(x) = \sin(x) - \dfrac{1}{x}$.
   (a) $\varphi'(x) = \cos(x) - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \cos(x) + \dfrac{1}{x^2}$.
   $\varphi''(x) = -\sin x - \dfrac{2x}{x^4} = -\sin x - \dfrac{2}{x^3}$.
   Sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi]$, $\sin x \geq 0$ et $x^3 > 0$ donc $\varphi''(x) \leq 0$

x	0		π
$\varphi''(x)$	$\|$	$-$	0
$\varphi'(x)$	$\|$	$\searrow$	$-1 + \dfrac{1}{\pi^2}$

(b) On admet qu'il existe une unique valeur x_0 appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \pi]$ telle que $\varphi'(x_0) = 0$ avec $\dfrac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.

x	0		x_0		π
$\varphi'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{\pi}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ car $x > 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = -\infty$

6. T_a passe par l'origine si, et seulement si,
   $a \sin(a) = 1 \Leftrightarrow \sin(a) = \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow \sin(a) - \dfrac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0.$
   On sait que $\dfrac{\pi}{2} < x_0 < \pi$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$ donc, d'après le tableau de variations précédent, φ s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi]$ donc deux tangentes à la courbe C passant par l'origine sur $]0\ ;\ \pi]$.

Exercice 2 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\,u_n^2 + 2u_n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 2$$

pour tout entier naturel n.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{2}\,u_n^2 + 2u_n - 2 = -\dfrac{1}{2}\,(u_n^2 - 4u_n + 4) = -\dfrac{1}{2}\,v_n^2$ pour tout entier naturel n.
2. **Initialisation** $v_0 = u_0 - 2 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$.
   Hérédité Supposons que $-1 \leq v_n \leq 0$ on a alors
   $0 \leq v_n^2 \leq 1$ car la fonction carrée est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$
   $-\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{1}{2}v_n^2 \leq 0$ en multipliant par $-\dfrac{1}{2} < 0$,
   d'où $-1 \leq -\dfrac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0$
   Conclusion Pour tout entier naturel$n$, $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n(v_n + 1)$
   Or $-1 \leq v_n \leq 0$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n \geq 0$ et $v_n + 1 \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ.
5. $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\dfrac{1}{2}\ell + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\dfrac{1}{2}\ell = -1 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -2$
   Comme $-1 \leq v_n \leq 0$, $-1 \leq \ell \leq 0$ et $\ell = 0$.
   $u_n = v_n + 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.