Nombres complexes I

Dans tout ce chapitre, i est un nombre vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$ et le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1. Un nombre complexe est un nombre pouvant s'écrire $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y sont des nombres réels. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z.
x et y sont appelés respectivement **partie réelle et partie imaginaire** de z, notés respectivement $Re(z)$ et $Im(z)$.

Notations L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

L'ensemble des nombres imaginaires purs, qui s'écrivent $z = \mathrm{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$, est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Remarque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Proposition 1. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff Re(z) = 0$

$z = z' \iff \Big(Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')\Big)$.

Les opérations de $\mathbb{R}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{C}$, en tenant compte du fait que $\mathrm{i}^2 = -1$.

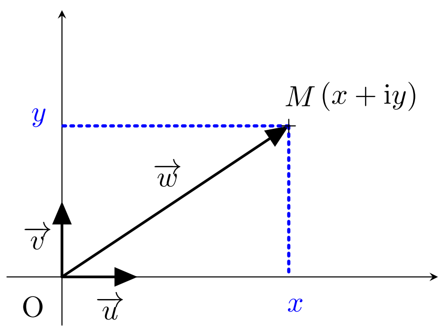
Exemple 1. Écrire sous forme algébrique les nombres $z_1 = (1+\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+6\mathrm{i}}$.

2 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition 2. Soit un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Le point M de coordonnées (x, y) est appelé **point image** de z ou point **d'affixe** z.

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées (x, y) est appelé **vecteur image** de z ou vecteur **d'affixe** z.



Proposition 2. Soient A, B deux points du plan et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

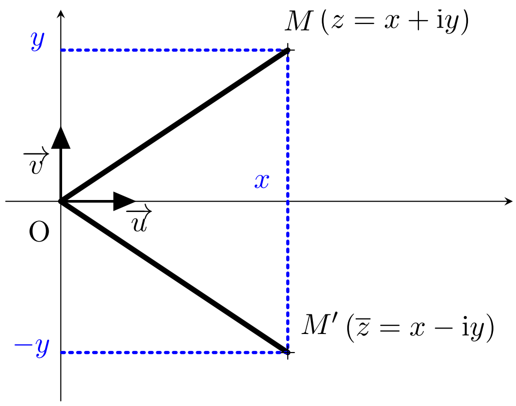
1. $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\quad z_{k\overrightarrow{u}} = kz_{\overrightarrow{u}}$.
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\quad z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple 2. A et B ont pour affixes respectives $z_A = 2 + \mathrm{i}$ et $z_B = 3 + 3\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe de C tel que $OABC$ est un parallélogramme. Quel est son centre ?
2. Calculer les affixes des points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Que dire du quadrilatère $OA'B'C'$?

3 Conjugaison et opérations

Définition 3. Soit un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$.
Le **conjugué** de z est le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.



Proposition 3. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$

1. $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$ 2. $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$ $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$

3. $\overline{\overline{z}} = z$ et $z\overline{z} = \left[Re(z)\right]^2 + \left[Im(z)\right]^2 \in \mathbb{R}_+$

4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemple 3. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \frac{z + \mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

4 Module et opérations

Définition 4. Soit un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Le module de z est le nombre réel positif défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque : Si M et $\overrightarrow{u}$ ont pour affixe z alors $|z| = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \|\overrightarrow{u}\|$.

Proposition 4. Si A et B sont deux points du plan et si $r \in \mathbb{R}_+^*$ alors

1. $|z_A - z_B| = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;
2. M d'affixe z est sur le cercle de centre A de rayon r ssi $|z - z_A| = r$
3. M d'affixe z est sur le disque de centre A de rayon r ssi $|z - z_A| \leq r$
4. M d'affixe z est sur la médiatrice de $[AB]$ ssi $|z - z_A| = |z - z_B|$

Exemple 4. Déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z + 2\mathrm{i}| = 2$ b) $|z - 1 + \mathrm{i}| = |z|$ c) $|1 + \mathrm{i}z| \leq 1$

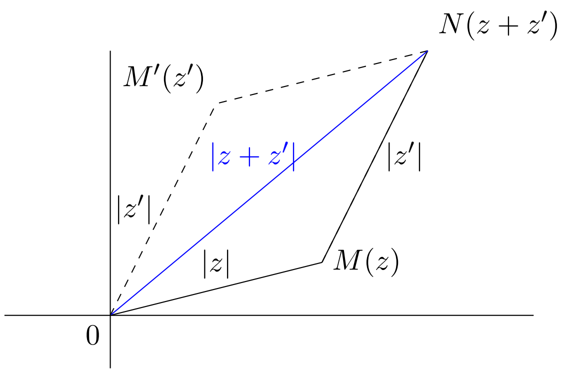
Propriété 1. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|\overline{z}| = |z|$ 2. $|z| = 0 \iff z = 0$ $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$
3. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ et $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$, si $z' \neq 0$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

Exemple 5. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{\mathrm{i}z + 1}{\mathrm{i}z - 1}$. Montrer que a) $|f(z)| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$ b) $|f(z)| < 1 \iff Im(z) > 0$. Interpréter géométriquement ces résultats.

Propriété 2. Inégalité triangulaire
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

avec égalité ssi $z' = 0$ ou $z = kz'$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.



Exemple 6. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$. Interpréter ce résultat.

5 Équations du second degré

Théorème 1. (et définition) Pour tout nombre complexe Δ non nul, l'équation $z^2 = \Delta$ admet deux solutions complexes opposées. Celles-ci sont appelées racines carrées de Δ.

Remarque : L'écriture $\sqrt{\Delta}$ ne s'utilise que pour un réel Δ positif et désigne l'unique réel positif dont le carré est Δ.

Exemple 7. Déterminer les racines carrées de $8 - 4\mathrm{i}$.

Théorème 2. (et définition) Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ (**forme développée**),
où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

1. $P(z) = a\left[(z - z_0)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, où $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ (**forme canonique**).
2. $P(z) = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)$, où $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\delta^2 = \Delta$ (**forme factorisée**).

Le nombre Δ est appelé discriminant de l'équation du second degré $P(z) = 0$.

- Si $\Delta = 0$, cette équation a une unique solution, z_0, appelée racine double.
- Si $\Delta \neq 0$, cette équation a deux solutions distinctes, z_1 et z_2, appelées racines simples.

Exemple 8. Résoudre : a) $2z^2 - 3z - 1 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + 2\mathrm{i}z - 3 + \mathrm{i} = 0$

Propriété 3. Somme et produit des racines Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ ssi $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple 9. Résoudre l'équation $z^2 + 4z - 5 = 0$ le plus rapidement possible.

Corollaire 1. Si on connait la somme $s = z_1 + z_2$ et le produit $p = z_1 \times z_2$ alors

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple 10. Déterminer tous les rectangles de périmètre 16 et d'aire 1.

6 Nombres complexes de module 1

Définition 5. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$.

Conséquence : $z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

6.1 Notation exponentielle

Définition 6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

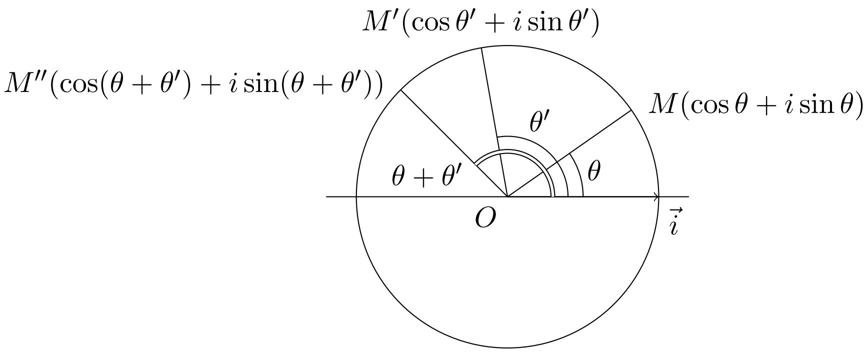
Propriété 4. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \theta' = \theta\ [2\pi]$

Propriété 5. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$

$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta)}$



Exemple 11. Soit $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Calculer $Z = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{12}$ et les racines carrées de z_2.

6.2 Applications en trigonométrie

Propriété 6. Formule de Moivre $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Exemple 12. Écrire $\cos(3x)$ comme polynôme en $\cos x$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Propriété 7. Formules d'Euler $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Exemple 13. Linéariser $\cos^3(t)$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 8. Factorisation par l'angle moitié

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \quad$ et $\quad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
2. $\forall p, q \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}$, et $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}p} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\mathrm{i}\sin\dfrac{p-q}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}$.

Exemple 14. Calculer $C_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$

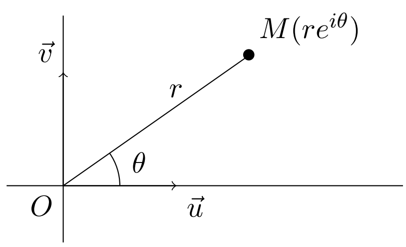
7 Nombres complexes écrits sous forme exponentielle

7.1 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 7. Soit z un nombre complexe non nul, de module $r = |z| > 0$.

La **forme exponentielle** de z est $\quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Tout nombre θ vérifiant cette relation est appelé **argument** de z et noté $\arg(z)$.



Remarque : Si M est le point image de $z \in \mathbb{C}^*$ alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ [2\pi]$.

Propriété 9. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$, on a $z' = z \iff (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') = \arg(z)\ [2\pi])$.

Exemple 15. Déterminer le module et un argument des nombres $z = 2 - 2\mathrm{i}$ et $z' = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Propriété 10. Soit $z = a + \mathrm{i}b$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$. Si $|z| = A$ et $\arg(z) = \varphi\ [2\pi]$ alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

Exemple 16. Déterminer l'amplitude et la phase du signal $u : t \mapsto \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$.

Propriété 11. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

1. $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$, $\quad z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
2. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$, $\quad \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

   $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$, $\quad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.

Exemple 17. La suite (z_n) est définie par $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_n$.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z_n \in \mathbb{R}$?

7.2 Applications en géométrie plane

Propriété 12. Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux. Alors on a :

$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi].$$

Exemple 18. Soient A et B d'affixes respectives $a = -2 + 4\mathrm{i}$ et $b = (-1 - 2\sqrt{3}) + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})$.

Déterminer la nature exacte du triangle OAB.