Nombres complexes I

Exercice 1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $(3-2i)^2$ 2. $\dfrac{3-2i}{5+i}$ 3. $\dfrac{3+i}{2-i} - \dfrac{2-i}{3+i}$ 4. $\dfrac{(2+4i)^2}{1-2i}$ 5. $\overline{\left(\dfrac{2-3i}{-3+i}\right)}$

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe z.

1. $z=(1-i)(3+2i)$ 2. $z=\dfrac{1-i}{3+2i}$

Exercice 3 Soit z un nombre complexe distinct de $-\mathrm{i}$. Soit $Z=\dfrac{\mathrm{i}-z}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que $|\mathrm{i}-z|^2 = 1+|z|^2+\mathrm{i}(z-\bar{z})$.
2. De même, donner une expression pour $|z+i|^2$.
3. Démontrer que $|Z|=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
4. Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit de module 1 ?

Exercice 4 Déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1. $\overline{z}=\mathrm{i}z^2$ 2. $z+\overline{z}=|z|$ 3. $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}$ 4. $(z-\mathrm{i})(z-1)\in\mathbb{R}$ 5. $|2z+1-\mathrm{i}|=4$
6. $|\mathrm{i}z-1|=|z+2|$ 7. $1\leq|z+1+\mathrm{i}|\leq 2$ 8. $|z-1-\mathrm{i}|=1$ et $|z+1+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$

Exercice 5 *Égalités et inégalités remarquables*

1. Montrer que pour tous complexes a et b, $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
2. Montrer que pour tous complexes a et b, si $|a|\leq 1$ et $|b|\leq 1$ alors $|a+b|\leq|1+a\overline{b}|$.
   Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2-z+1=0$ 2. $-\dfrac{1}{2}z^2+2z+4=0$ 3. $4z^2-4(1+\mathrm{i})z+5(1-2\mathrm{i})=0$
4. $z^4-(3+2\mathrm{i})z^2+(1+3\mathrm{i})=0$ 5. $z^2-2\cos\theta z+1=0$, où θ est un nombre réel quelconque.

Exercice 7 Dans chacun des cas suivants, trouver une racine évidente de l'équation, puis factoriser le polynôme P.

1. $P(z)=z^3-z-6$ 2. $P(z)=z^3-iz^2-z+i$ 3. $P(z)=2z^3+z^2+3z-i+1$

Exercice 8 On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre de son cercle circonscrit. On se place dans un repère orthonormé direct de centre O, dans lequel on note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

Montrer que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G d'affixe

$$\frac{a+b+c}{3}$$