Fonctions d'une variable réelle

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Rappel : Les nombres réels sont représentés sur la droite réelle (graduée).

• On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs (ou nuls).

• On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs (ou nuls).

• 0 est l'unique nombre réel qui soit à la fois positif et négatif.

Propriété 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Si $a + b = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

Exemple 1. Déterminer l'ensemble des nombres réels x vérifiant :

$$\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x + 1} = 0.$$

Définition 1. On définit une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$, notée $\leq$, de la manière suivante :

pour tout nombre réel a et b, $a \leq b$ signifie que $b - a \in \mathbb{R}_+$ (ou $a - b \in \mathbb{R}_-$).

Si $a \leq b$, on dit que a est inférieur (ou égal) à b, ou que b est supérieur (ou égal) à a, ce qui s'écrit encore $b \geq a$. Dans ce cas, on dit aussi que a est majoré par b ou que b est minoré par a.

Exemple 2. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On note A leur moyenne arithmétique et H leur moyenne harmonique, définies par $A = \dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{2}{H} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Comparer les nombres réels A et H.

Remarque : La négation de $a \leq b$ est : $a \geq b$ et $a \neq b$ (ce qui s'écrit $a > b$).

$\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) est l'ensemble des nombres réels a vérifiant $a > 0$ (resp. $a < 0$).

Propriété 2. **RAT** La relation d'ordre $\leq$ vérifie, pour tout réel a, b et c :

1. $a \leq a$ **Réflexivité**
2. si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ **Transitivité**
3. si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$ **Antisymétrie**.

Propriété 3. Compatibilité avec l'addition et la multiplication

Soient a, b et c trois nombres réels.

1. si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
2. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.
3. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$.

Corollaire 1. Soient a, b, c et d quatre nombres réels.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$

Exemple 3. x et y sont deux nombres réels tels que $1 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq -2$.

Encadrer les nombres réels $A = 2x + 3y - 5$, $B = xy$ et $C = (x - y)^2$.

Corollaire 2. Soient a, b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.

1. si $0 \leq a \leq b$ alors $a^n \leq b^n$
2. Si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
3. si $0 < a \leq b$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Si $a \leq b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Exemple 4. x est un nombre réel tel que $0 \leq x \leq 2\pi$. Encadrer $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos(x) + 2}{x^3 + 1}}$ par deux nombres entiers.

2 Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

Définition 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On définit les **intervalles** de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

intervalles bornés	**intervalles non bornés**
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x \leq b\}$ fermé	$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x\}$ fermé
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x < b\}$ ouvert	$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x\}$ ouvert
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x < b\}$ semi-ouvert à droite	$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ x \leq b\}$ fermé
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x \leq b\}$ semi-ouvert à gauche	$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}/ \ x < b\}$ ouvert

Cas particuliers : $]a, a[= \emptyset$ (ensemble vide), $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$ ...

Exemple 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[0, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$ et $J_n = \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$.

1. Montrer que $I_{n+1} \subset I_n$ et que $J_n \subset J_{n+1}$.
2. En déduire l'intersection des intervalles I_n et la réunion des J_n.

Remarque On peut définir les intervalles de nombres entiers en posant, pour deux entiers relatifs m et n tels que $m < n$: $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$.

Définition 3. Pour tout nombre réel x on définit sa **valeur absolue** en posant :

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x| = 3$ $\quad |x| < 3 \quad$ $3 \leq |x| < 5$.

Remarque : Pour tout réel x, $|x| \geq 0$, avec égalité ssi $x = 0$. $\quad |-x| = |x|$, $\quad x \leq |x|$, $|x|^2 = x^2$.

Définition 4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. **La distance entre un nombre réel** x **et** a est le nombre réel positif

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ a - x & \text{si } x < a \end{cases}$$

x est une **valeur approchée** de a à ε près ssi $|x - a| \leq \varepsilon$

x est une **valeur approchée par défaut** de a à ε près ssi $a - \varepsilon \leq x \leq a$

x est une **valeur approchée par excès** de a à ε près ssi $a \leq x \leq a + \varepsilon$.

Exemple 7. Majorer la distance entre a et b où a est une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $2,41$ et b est une valeur approchée à $0,1$ près de $2,4$.

Propriété 4. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel x, $|x|$ est la distance entre x et 0, et

1. $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = -\varepsilon$ ou $x = \varepsilon$ $\quad$ 2. $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ $\quad$ 3. $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon$ ou $x \geq \varepsilon$.

Exemple 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $|1 - 2x| = |x - 2|$ $\quad$ b) $|3x + 2| < 1$ $\quad$ c) $|4 - 5x| \geq 2$.

Propriété 5. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. 1. $|xy| = |x| \times |y|$ $\quad$ 2. Si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $\quad$ 3. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $|x^n| = |x|^n$

Propriété 6. Inégalité triangulaire Pour tous nombres réels x et y, $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Exemple 9. Majorer $|x+y|$, $\left|\frac{x}{y}\right|$ et $\sqrt{x^2+y^2}$ sachant que $x \in [-1,2]$ et $y \in [1,3]$.

Corollaire 3. Pour tous nombres réels x et y, $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$.

3 Parties de $\mathbb{R}$ majorées, minorées, bornées

Définition 5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ (c.à.d. A est un ensemble de nombre réels).

1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si tout élément x de A vérifie $x \leq M$.
   Si un tel réel M existe, on dit que la partie A est majorée.
2. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si tout élément x de A vérifie $x \geq m$.
   Si un tel réel m existe, on dit que la partie A est minorée.
3. On dit que A est **bornée** si A est à la fois minorée et majorée.

Exemple 10. La partie $A = \left\{t^2-t+1,\ t \geq 0\right\}$ de $\mathbb{R}$ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

Théorème 1. et définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée et contient un de ses majorants, alors elle ne peut en contenir qu'un.
   Un tel élément de A est appelé **maximum (ou plus grand élément)** de A, et noté $\max(A)$.
2. Si A est minorée, et contient un de ses minorants, alors elle ne peut en contenir qu'un.
   Un tel élément de A est appelé **minimum (ou plus petit élément)** de A, et noté $\min(A)$.

Conséquence Si ils existent, le maximum et le minimum de A sont définis par :

1. $M = \max(A)$ ssi $M \in A$ et tout élément x de A vérifie $x \leq M$.
2. $m = \min(A)$ ssi $m \in A$ et tout élément x de A vérifie $x \geq m$.

Exemple 11. Étudier l'existence d'un maximum et d'un minimum de $A = [0,1[$.

Définition 6. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A est majorée, et si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **borne supérieure** de A, et noté $\sup(A)$.
2. Si A est minorée, et si l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **borne inférieure** de A, et noté $\inf(A)$.

Conséquence Si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de A sont définies par :

1. $M = \sup(A)$ ssi M est un majorant de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément x de A vérifiant $M - \varepsilon < x \leq M$
2. $m = \inf(A)$ ssi m est un minorant de A tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément x de A vérifiant $m \leq x < m + \varepsilon$

Théorème 2. de la borne supérieure (admis)

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Exemple 12. Dans chaque cas, montrer que A admet des bornes supérieure et inférieure, et étudier l'existence d'un maximum et d'un minimum de A :

a) $A = \left\{ \dfrac{1}{1+t},\ t > 0 \right\}$ b) $A = \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Remarque : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$. Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Corollaire 4. Soit I une partie de $\mathbb{R}$.

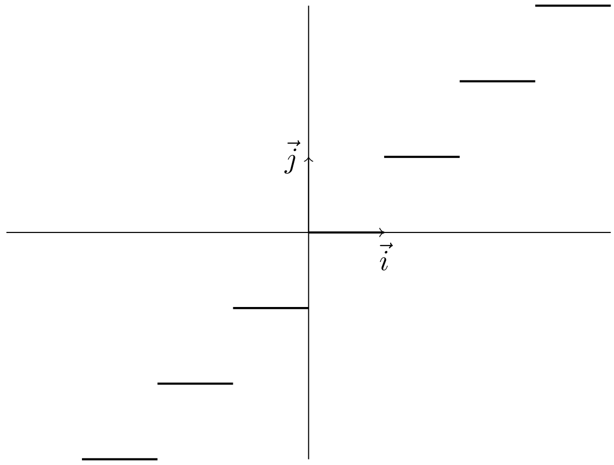
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset I$.

Exemple 13. La partie $A = \{x \in \mathbb{R} / \ |x| \geq 10^{-6}\}$ est-elle un intervalle de $\mathbb{R}$?

Remarque : L'intersection de deux intervalles est un intervalle. Mais la réunion de deux intervalles n'est, en général, pas un intervalle.

4 Partie entière et approximations décimales d'un réel

Rappel : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On admettra aussi que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (un maximum).



Théorème 3. et définition Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif m tel que

$$m \leq x < m+1.$$

Ce nombre m est appelé **partie entière** de x, noté $\lfloor x \rfloor$ et vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemple 14. Déterminer la partie entière des nombres -2.3, $\dfrac{5}{3}$ et $\sqrt{7}$.

Exemple 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $\lfloor x \rfloor \leq -2$ b) $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 1$.

Propriété 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. 1. $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a$. 2. $a \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow a = \lfloor a \rfloor$
3. Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $\lfloor a+n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n$ 4. si $n \in \mathbb{Z}$ alors $n \leq a \Longleftrightarrow n \leq \lfloor a \rfloor$.

Exemple 16. Étudier la fonction (partie décimale) $\delta : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$. Tracer l'allure de son graphe.

Remarque : Si $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ alors $0 \leq 2k \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et
$1 \leq 2k+1 \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Théorème 4. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Exemple 17. Trouver des approximations décimales par défaut et par excès de $\dfrac{1}{3}$ à 10^{-5} près.

Remarque : Pour tout réel x, la suite de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une suite de nombres décimaux qui converge vers x.

5 Généralités sur les fonctions réelles

Dans ce qui suit, f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, appelée **ensemble de définition** de f : $\left|\begin{array}{ll} D_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}\right.$

On note C_f sa courbe représentative, appelée aussi graphe de f, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$C_f = \{M(x,y) : \ y = f(x), \ x \in D_f\} = \{M(x, f(x)), \ x \in D_f\}.$$

5.1 Parité et périodicité

Définition 7. 1. On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f, \ -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

2. On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f, \ -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence : Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à (Oy), celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O. On peut alors étudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}_+$, puis compléter la courbe par symétrie.

Exemple 18. Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité :

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-|x|}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Définition 8. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est T **périodique** si

$$\forall x \in D_f, \ x + T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Conséquence : Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On peut alors étudier f sur $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$, puis compléter la courbe par ces translations.

Exemple 19. Étudier la périodicité de la fonction $u : t \mapsto A\sin(\omega t - \varphi)$, où $A, \omega \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

5.2 Fonctions et relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 9. Une fonction f est dite :

1. **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D_f, \ f(x) \leq M$
2. **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D_f, \ f(x) \geq m$
3. **bornée** si f est majorée et minorée.

Théorème 5. Soit $I \subset D_f$. La fonction f est bornée sur I ssi il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I, \ \ |f(x)| \leq K.$$

Exemple 20. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2 - \cos(x)}{1 + x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition 10. Soit $I \subset D_f$. La fonction f est dite :

1. **croissante** sur I si pour tout $\ a, b \in I, \ \ a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

   strictement croissante sur I si pour tout $\ a, b \in I, \ \ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$

2. **décroissante** sur I si pour tout $\ a, b \in I, \ \ a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

   strictement décroissante sur I si pour tout $\ a, b \in I, \ \ a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$

3. **monotone** sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.

5.3 Opérations sur les fonctions

Définition 11. Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On note $f + g$ la fonction définie sur D par $\ f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
2. On note λf la fonction définie sur D par $\ \lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$
3. On note fg la fonction définie sur D par $\ fg : x \mapsto f(x)g(x)$
4. Si g ne s'annule pas sur D, on note $\dfrac{f}{g}$ la fonction définie sur D par $\ \dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Définition 12. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\ \forall x \in I, \ \ f(x) \in J$.

On appelle **composée** de f et g la fonction définie par $g \circ f : \left| \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$

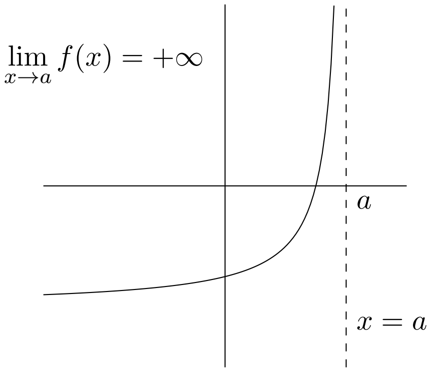
Exemple 21. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

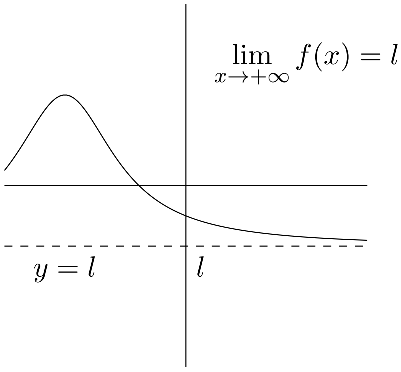
1. Écrire f comme composée de deux fonctions.
2. Dresser le tableau de variation de f puis tracer l'allure de son graphe.
3. En déduire celui de $x \mapsto f(x) + 2$, $x \mapsto f(x + 2)$, $x \mapsto f(x - 2)$, $x \mapsto f(2x)$ et $x \mapsto 2f(x)$.

5.4 Asymptotes horizontales et verticales

Définition 13. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ x_0[$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) alors on dit que la courbe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Définition 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la courbe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.





Méthode **Limite d'une fraction rationnelle en l'infini :** elle est donnée par la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple 22. Déterminer les limites de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 5x - 3}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

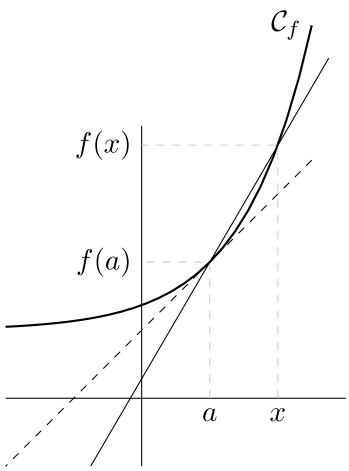
6 Calcul des dérivées et applications

Dans ce paragraphe, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 15. Soit f une fonction définie sur I.

On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque $x \to a$.

Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.



Propriété 8.

1. Si f est dérivable en $a \in I$ alors la courbe C_f admet une tangente en $A(a, f(a))$, de pente $f'(a)$, et d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors la courbe C_f admet une tangente verticale en $A(a, f(a))$.

Exemple 23. Déterminer, si elle existe, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 1 :

a) $f : x \mapsto x^4$ b) $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

Définition 16. Soit f une fonction définie sur I.
On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point a de I.

Dans ce cas, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f sur I.

Dérivées usuelles

fonction f	domaine de dérivabilité	dérivée
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Propriété 9. Si f et g sont dérivables sur I alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
3. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
4. si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Propriété 10. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Cas particuliers : Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u^n : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
2. si $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, la fonction $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. si $ax + b \in I$, $\forall x \in J$, la fonction $g : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $g'(x) = au'(ax + b)$

Exemple 24. Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto (1 - 3x)^7$ et celle de $g : x \mapsto 2x\sqrt{1 - x^2}$.

Propriété 11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

1. Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Remarque : On peut être amené à étudier le signe de la dérivée de f', notée f'' et appelée dérivée seconde de f. On définit par récurrence les dérivées *k-ièmes* de f :

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k-1)} \text{ est dérivable et } f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

Plan d'étude d'une fonction : pour une fonction réelle $f : x \mapsto f(x)$.

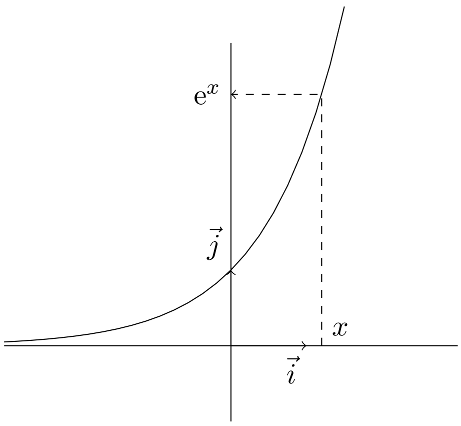
- Domaine de définition.
- Parité et périodicité, réduction éventuelle du domaine d'étude.
- Domaine de dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée et Tableau de variation.
- Limites aux bornes, asymptotes verticales ou horizontales éventuelles.
- Tracé des éventuelles tangentes horizontales et asymptotes verticales et horizontales.
- Tracé du graphe de f.

Exemple 25. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

7 Étude de fonctions usuelles

7.1 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y' = y$ et $y(0) = 1$. Elle est notée $\exp : x \mapsto e^x$



Propriété 12. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$e^a > 0 \qquad e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{na}$

Propriété 13. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^x)' = e^x$

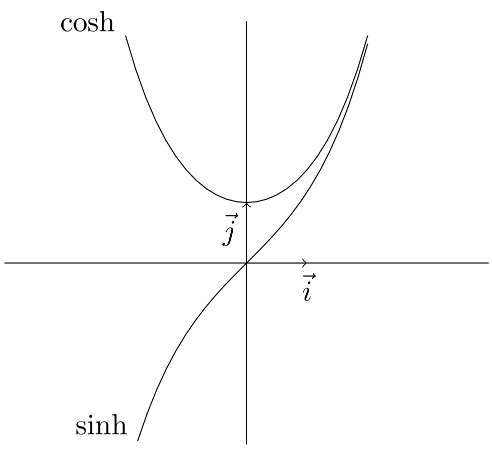
Si u est dérivable sur I alors $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\quad (e^u)' = u'e^u$

Propriété 14. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

7.2 Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies par

$$\mathrm{ch}\, : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\, : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



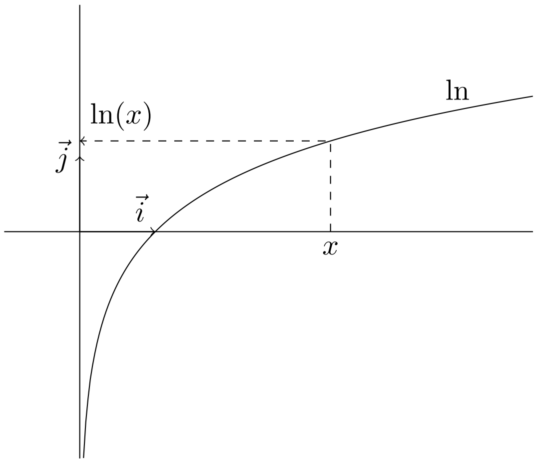
Propriété 15. ch est paire, sh est impaire, et pour tout $x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Propriété 16. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ e $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$

Si u est dérivable sur I alors $\mathrm{ch}\, u : x \mapsto \mathrm{ch}\,(u(x))$ et $\mathrm{sh}\, u : x \mapsto \mathrm{sh}\,(u(x))$ sont dérivables sur I et $(\mathrm{ch}\, u)' = u'\mathrm{sh}\, u$ et $(\mathrm{sh}\, u)' = u'\mathrm{ch}\, u$

7.3 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est l'intervalle $]0,+\infty[$: pour tout réel $x>0$, il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, noté $y=\ln(x)$. Ainsi, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction logarithme népérien notée $\ln : x \mapsto \ln(x)$.



Propriété 17. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$b=\ln(a) \Longleftrightarrow a=\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{\ln(a)}=a \qquad \ln(\mathrm{e}^b)=b$$

Propriété 18. Pour tout $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b) \qquad \ln(a^n)=n\ln(a)$$

Propriété 19. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Si u est dérivable sur I et $u>0$ sur I alors $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

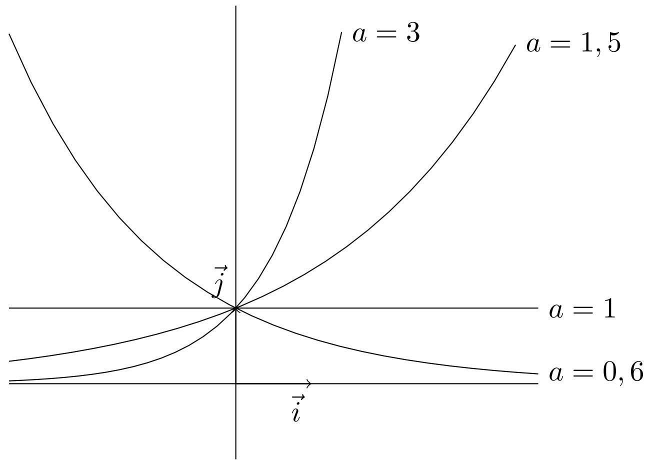
Propriété 20. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Cas particulier : La fonction logarithme décimal est définie par $\log : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Elle vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln et $\forall n \in \mathbb{Z},\ \log(10^n)=n$.

7.4 Fonctions exponentielles généralisées

Définition 17. Si $a > 0$, on définit **la fonction exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $a^x = e^{x \ln a}$

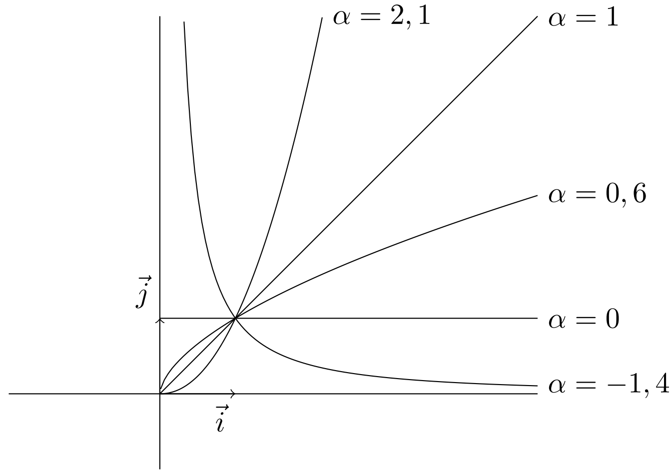


Propriété 21. La dérivée de $x \mapsto a^x$ est la fonction $x \mapsto (\ln a)\, a^x$

Si $a > 1$ alors la fonction exponentielle de base a est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Si $0 < a < 1$ alors la fonction exponentielle de base a est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

7.5 Fonctions puissances



Définition 18. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $x > 0$, alors $\mathrm{e}^{n \ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = x^n$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0, +\infty[$ la **fonction puissance** α notée $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$

Propriété 22. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)\,; \qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$$

Propriété 23. (dérivation) La fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Si u est dérivable et $u > 0$ sur I alors $u^\alpha : x \mapsto (u(x))^\alpha$ est dérivable sur I et

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Cas particuliers : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $p_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $p_{-n} : x \mapsto x^{-n}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. En posant $0^{\frac{1}{n}} = 0$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la **fonction racine *n-ième*** notée $p_{\frac{1}{n}} : x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

   Ainsi, pour tout $a, b > 0$, $b = a^n \iff a = \sqrt[n]{b}$.

Propriété 24. Croissances comparées Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[\ln(x)]^\beta}{x^\alpha} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{[\ln(x)]^\alpha} = +\infty$

Exemple 26. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition :

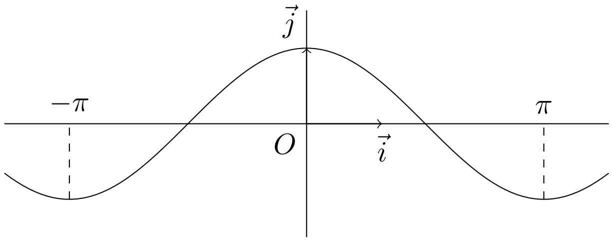
a) $f : x \mapsto 2^x$ b) $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}}$ c) $f : x \mapsto \sqrt[4]{x} e^{-2x}$.

7.6 Fonctions sinus, cosinus et tangente

Propriété 25. La **fonction cosinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et :

$$\cos' = -\sin$$

Si u est dérivable sur I alors $\cos u : x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable sur I et $(\cos u)' = -u' \sin u$

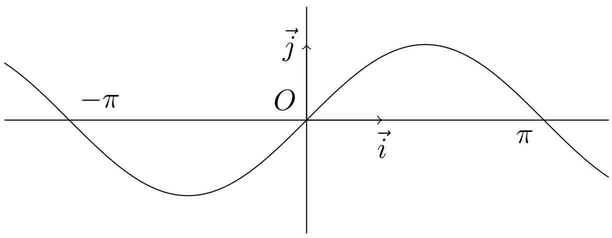


Courbe de $x \mapsto \cos x$

Propriété 26. La **fonction sinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et :

$$\sin' = \cos$$

Si u est dérivable sur I alors $\sin u : x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable sur I et $(\sin u)' = u' \cos u$

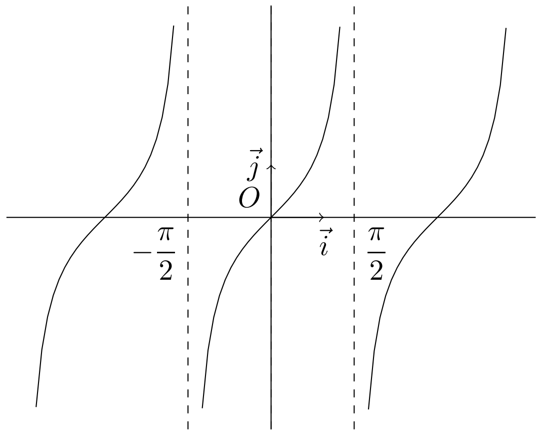


Courbe de $x \mapsto \sin x$

Propriété 27. La **fonction tangente** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, impaire, π-périodique et : $\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

Si u est dérivable sur I et $u(I)\subset\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, alors $\tan u : x\mapsto \tan(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$



Courbe de $x\mapsto \tan x$

Propriété 28. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan x = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x = +\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Exemple 27. Étudier la limite de $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ lorsque $x\to 0$.

7.7 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 19. f est une fonction à valeurs complexes s'il existe des fonctions réelles $u : I\mapsto\mathbb{R}$ et $v : I\mapsto\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in I,\ \ f(x) = u(x)+\mathrm{i}v(x)$.

Dans ce cas, u et v sont les parties réelle et imaginaire de f : $u=\mathrm{Re}(f)$ et $v=\mathrm{Im}(f)$.

f est dérivable sur I ssi u et v sont dérivables sur I. Dans ce cas, $f' = u'+\mathrm{i}v'$

Exemple 28. Déterminer la fonction dérivée de $f : t\mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$

Propriété 29. Si $f : I\to\mathbb{C}$ est dérivable sur I alors $\exp f : x\mapsto \exp(f(x))$ est dérivable sur I et $(\exp f)' = f'\exp f$.