Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

1. Montrer que pour tous réels positifs x et y, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = y$.

2. Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, $\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \leq \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2 1. Montrer que pour tous réels x et y :

$$\frac{|x|+|y|}{2} \leq \max\{|x|,|y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \leq 2\max\{|x|,|y|\}.$$

2. Dans un repère orthonormé du plan, représenter l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant :

a) $\max\{|x|,|y|\} \leq 1$ b) $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ c) $|x|+|y| \leq 1$

Exercice 3 Dans chaque cas étudier, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A :

1. $A = \left\{\dfrac{x^2}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}\right\}$. 2. $A = \left\{\dfrac{\ln(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 3. $A = \left\{\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|,\ n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 4

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et tracer l'allure de son graphe.

2. Étudier les bornes inférieure et supérieure de f.

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

1. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f.
2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Étudier les variations de la fonction f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum et le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Déterminer dans chaque cas si la fonction f est minorée, majorée, ou bornée sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 2\cos^2 x + 3\sin x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ sur $I =]-1,+\infty[$

c) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{1-x}$ sur $I =]0,1[$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur $I =]0,+\infty[$

Exercice 8 Étudier la fonction f : a) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ b) $f : x \longmapsto \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

Exercice 9 Étudier les fonctions suivantes

1. $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1+\cos t)\sin t \end{array} \right.$ 2. $g : x \longmapsto x^{\sqrt{x}}$

Exercice 10

1. Démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1 \ ; \ +\infty[$.
3. Démontrer que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $\sin x \leq x \leq \tan x$
5. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$

Exercice 11 Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
   (b) Étudier la parité de la fonction f sur D_f.
   (c) Démontrer que la fonction f est π- périodique.
   (d) Justifier, à l'aide des questions précédentes, que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $]0 \ ; \ \frac{\pi}{2}]$.
2. (a) Justifier que la courbe C admet une asymptote sur $]0 \ ; \ \frac{\pi}{2}]$.
   (b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur $]0 \ ; \ \frac{\pi}{2}]$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction d définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $d(x) = f(x) - \left(-x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
   (c) En déduire la position relative de la droite T et de la courbe C.
4. Tracer l'allure du graphe de f sur $]0 \ ; \ \frac{\pi}{2}]$, puis sur $]-\pi \ ; \ 0[\cup]0 \ ; \ \pi]$ en expliquant les transformations utilisées.

   Représenter également la droite T et les éventuelles asymptotes à la courbe C.