Nombres complexes I

Exercice 1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $3-2i+5+i$ 2. $(3-2i)(5+i)-i(3+2i)$ 3. $(3-2i)^2$ 4. $\dfrac{3-2i}{5+i}$

5. $\dfrac{3+i}{2-i}-\dfrac{2-i}{3+i}$ 6. $\dfrac{(2+4i)^2}{\overline{1-2i}}$ 7. $\overline{(3-2i)}(5-i)$ 8 $\overline{\left(\dfrac{2-3i}{-3+i}\right)}$

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, déterminer le module du nombre complexe z.

1. $z=1-i$ 2. $z=3+2i$ 3. $z=(1-i)(3+2i)$ 4. $z=\dfrac{1-i}{3+2i}$ 5. $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

Exercice 3 Soit z un nombre complexe distinct de $-\mathrm{i}$. Soit $Z=\dfrac{\mathrm{i}-z}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que $|\mathrm{i}-z|^2=1+|z|^2+\mathrm{i}(z-\bar{z})$.
2. De même, donner une expression pour $|z+i|^2$.
3. Démontrer que $|Z|=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
4. Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit de module 1 ?

Exercice 4 Déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1. $\overline{z}=\mathrm{i}z^2$ 2. $z+\overline{z}=|z|$ 3. $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}$ 4. $(z-\mathrm{i})(z-1)\in\mathbb{R}$ 5. $|2z+1-\mathrm{i}|=4$

6. $|\mathrm{i}z-1|=|z+2|$ 7. $1\leq|z+1+\mathrm{i}|\leq 2$ 8. $|z-1-\mathrm{i}|=1$ et $|z+1+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$

Exercice 5 *Égalités et inégalités remarquables*

1. Montrer que pour tous complexes a et b, $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
2. Montrer que pour tous complexes a et b, si $|a|\leq 1$ et $|b|\leq 1$ alors $|a+b|\leq|1+a\bar{b}|$.
   Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6 a et b sont deux nombres complexes distincts, de module 1 et tels que $ab\neq -1$.

1. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{a-b}{1+ab}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\dfrac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - z + 1 = 0$ 2. $-\frac{1}{2}z^2 + 2z + 4 = 0$ 3. $4z^2 - 4(1+\mathrm{i})z + 5(1-2\mathrm{i}) = 0$

4. $z^4 - (3+2\mathrm{i})z^2 + (1+3\mathrm{i}) = 0$ 5. $z^2 - 2(1-i)z - 1 - 2i = 0$

6. $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$, où θ est un nombre réel quelconque.

Exercice 8 Dans chacun des cas suivants, trouver une racine évidente de l'équation, puis factoriser le polynôme P.

1. $P(z) = z^3 - z - 6$ 2. $P(z) = z^3 - iz^2 - z + i$ 3. $P(z) = 2z^3 + z^2 + 3z - i + 1$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

1. $\cos x - i\sin x$ 2. $-\cos x - i\sin x$ 3. $-\cos x + i\sin x$ 4. $\sin x + i\cos x$
5. $-\sin x + i\cos x$ 6. $\sin x - i\cos x$

Exercice 10

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ comme polynôme en $\sin\theta$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$ puis en déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$.

2. On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \sin\frac{\pi}{5}$

   (a) Exprimer $\cos\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{3\pi}{5}$ en fonction de x et de y.

   (b) Démontrer que $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$.

   (c) En déduire les valeurs de x et de y.

3. Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

   (a) Justifier que le côté d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $2\sin\frac{\pi}{5}$.

   (b) Tracer le cercle de centre O de rayon 1.
   Placer les points A, A' et I d'affixes respectives $1, -1$ et i.
   Placer le point H milieu de $[\mathrm{OA}']$. Le cercle de centre H passant par I recoupe le segment [OA] en K.

   (c) Montrer que le segment IK a pour longueur le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle.

   (d) Tracer ce pentagone à la règle et au compas.

Exercice 11 1. Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x \sin^3 x$.

2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{3}{4}\left[3^n \sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - \sin\theta\right]$.

Exercice 12 1. Soient $\theta, \theta' \in [0, \pi[$. Déterminer le module et un argument des nombres :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z - 1 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 0$.

Exercice 13 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

1. $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $z = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $z = -1$ 4. $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ 5. $z = i$

Exercice 14 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

1. $5e^{i\frac{\pi}{3}}$ 2. $3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 3. $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 4. $\dfrac{5}{2}e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ 5. $4e^{3i\pi}$ 6. $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 15 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle .

1. $1 + i\sqrt{3}$ 2. $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ 3. $-5i$ 4. -4 5. $\dfrac{7}{2}$ 6. $3i$

7. $\dfrac{5\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ 8. $\dfrac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ 9. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$ 10. $\dfrac{i(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^4}$

Exercice 16 1. Écrire sous forme exponentielle a) $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^6 \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ b) $\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^3$.

2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $(1 + \mathrm{i})^n$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 17 Transformer sous la forme $A\cos(t - \varphi)$.

1. $-3\sqrt{3}\cos t + 3\sin t$ 2. $-4\cos t$ 3. $\dfrac{1}{4}\cos t + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin t$ 4. $5\sin t$

Exercice 18 On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre de son cercle circonscrit. On se place dans un repère orthonormé direct de centre O, dans lequel on note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

1. Montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes en G d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.
2. Montrer que H d'affixe $a + b + c$ est le point de concours des hauteurs de ABC.
3. Que peut-on dire des points O, G et H ?

Exercice 19 Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on considère les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3. Déterminer l'ensemble des points M tels que MNP soit un triangle rectangle.