Correction du Test n$^{\text{o}}$ 2

Sujet A

2. $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}} = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}\,\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}-2+\mathrm{i}(2\sqrt{2}+1)}{3}$

3. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que $Z = z + \overline{z}^2$ soit réel.

$Z = z + \overline{z}^2 = x + iy + (x - iy)^2 = x^2 + x - y^2 + i(y - 2xy) = x^2 + x - y^2 + iy(1 - 2x)$. Ainsi, Z est réel si et seulement si Im $(Z) = 0 \iff y(1-2x) = 0 \iff y = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$
Ainsi, l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

4. $3z + \dfrac{1}{z} = z \Leftrightarrow \dfrac{3z^2+1}{z} = z \Leftrightarrow 3z^2 + 1 = z^2 \Leftrightarrow 2z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ ou $z = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$
Donc f admet deux points invariants d'affixes $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$

Correction du Test n$^{\text{o}}$ 2

Sujet B

2. $z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{-2+\sqrt{2}+\mathrm{i}(-1-2\sqrt{2})}{3}$

3. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que $Z = (z+\mathrm{i})(1+\overline{z})$ soit réel.

$Z = (z+\mathrm{i})(1+\overline{z}) = z + \mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i} + z\overline{z} = x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) + \mathrm{i} + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + x + y + \mathrm{i}(1 + y + x)$.

Ainsi, Z est réel si et seulement si $\Im m(Z) = 0 \iff 1 + x + y = 0 \iff y = -x - 1$.
L'ensemble E des points est donc la droite d'équation $y = -x - 1$.

4. $-4z - \dfrac{1}{z} = z \Leftrightarrow \dfrac{-4z^2-1}{z} = z \Leftrightarrow -4z^2 - 1 = z^2 \Leftrightarrow 5z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$ ou $z = -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$
Donc f admet deux points invariants d'affixes $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$ et $-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$