Nombres complexes II

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1 Nombres complexes de module 1

Définition 1. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| = 1\}$.

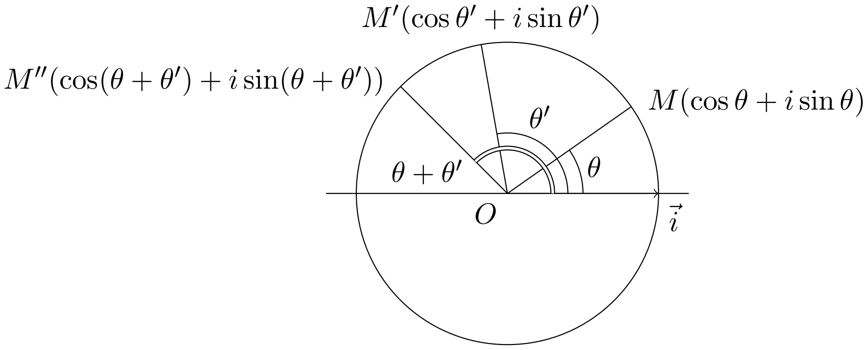
Conséquence : $z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

1.1 Notation exponentielle

Définition 2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Propriété 1. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \theta' = \theta\ [2\pi]$

Propriété 2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta)}$



Exemple 1. Soit $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Calculer $Z = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{12}$ et les racines carrées de z_2.

1.2 Applications en trigonométrie

Propriété 3. Formule de Moivre $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Exemple 2. Écrire $\cos(3x)$ comme polynôme en $\cos x$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Propriété 4. Formules d'Euler $\forall\theta \in \mathbb{R},\quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

Exemple 3. Linéariser $\cos^3(t)$. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 5. Factorisation par l'angle moitié

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
2. $\forall p, q \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} = 2\mathrm{i}\sin\dfrac{p-q}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}$.

Exemple 4. Calculer $C_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$ et $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)$

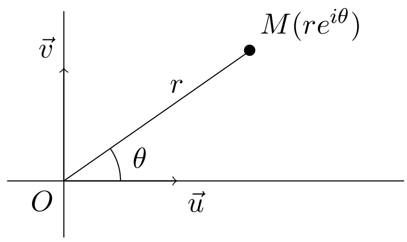
2 Nombres complexes écrits sous forme exponentielle

2.1 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 3. Soit z un nombre complexe non nul, de module $r = |z| > 0$.

La **forme exponentielle** de z est $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Tout nombre θ vérifiant cette relation est appelé **argument** de z et noté $\arg(z)$.



Remarque : Si M est le point image de $z \in \mathbb{C}^*$ alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)\ [2\pi]$.

Propriété 6. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$ $z' = z \Leftrightarrow (|z'| = |z|$ et $\arg(z') = \arg(z)\ [2\pi])$.

Exemple 5. Déterminer le module et un argument des nombres $z = 2-2\mathrm{i}$ et $z' = -3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Propriété 7. Soit $z = a+\mathrm{i}b$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$. Si $|z| = A$ et $\arg(z) = \varphi\ [2\pi]$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = A\cos(t-\varphi).$$

Exemple 6. Déterminer l'amplitude et la phase du signal $u : t \mapsto \cos t - \sqrt{3}\sin t$.

Propriété 8. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

1. $z \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$, $\qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
2. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$, $\qquad \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

   $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$, $\qquad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.

Exemple 7. La suite (z_n) est définie par $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z_n$.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z_n \in \mathbb{R}$?

2.2 Applications en géométrie plane

Propriété 9. Soient A, B et C trois points du plan distincts deux à deux. Alors on a :

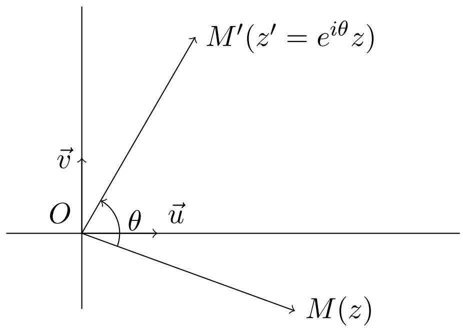
$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi].$$

Exemple 8. Soient A et B d'affixes respectives $a = -2 + 4\mathrm{i}$ et $b = (-1 - 2\sqrt{3}) + \mathrm{i}(2 - \sqrt{3})$.

Déterminer la nature exacte du triangle OAB.

3 Rotations dans le plan

Définition 4. En associant à M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = e^{\mathrm{i}\theta}z$, on définit une transformation du plan appelée **rotation de centre O et d'angle θ**, d'écriture complexe $z \mapsto e^{\mathrm{i}\theta}z$.



Remarque Si on note r la rotation de centre O et d'angle θ, alors pour tout $M \neq O$:

$$M' = r(M) \Longleftrightarrow \frac{OM'}{OM} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \ [2\pi].$$

Exemple 9. f est la transformation d'écriture complexe $f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - \mathrm{i}$.
Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

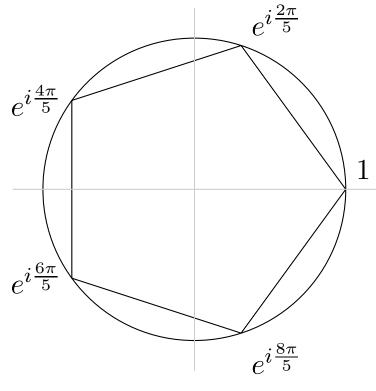
4 Résolutions d'équations $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}^*$

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **racine n-ième** de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} /\ z^n = 1\}$.

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$$



Exemple 10. Déterminer et représenter géométriquement $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

Propriété 10. Soit un entier $n \geq 3$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. $z^n = 1 \Leftrightarrow \left(z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right)$
2. $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$;
3. $1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1} = 0$;
4. l'image de $\mathbb{U}_n$ est un polygone régulier à n cotés, inscrit dans le cercle trigonométrique, dont un sommet a pour affixe 1.

Définition 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

On appelle **racine n-ième** de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Théorème 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.
$z^n = a \Leftrightarrow \left(z = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right)$, où r et α sont respectivement le module et un argument de a.

Exemple 11. Déterminer les racines cubiques de $a = 8\mathrm{i}$.

5 Exponentielle complexe

Définition 7. Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On définit l'exponentielle de z par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Remarque : $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x\cos(y)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x\sin(y)$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$, car $\mathrm{e}^x > 0$, et $\arg(\mathrm{e}^z) = y\ [2\pi]$.

Exemple 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$.

Propriété 11. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

1. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff (z = z' + 2\mathrm{i}k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$;
2. $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}, \qquad \dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{z'}} = \mathrm{e}^{z-z'}, \qquad (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}.$

Exemple 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$.