Nombres complexes II

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 1

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ comme polynôme en $\sin\theta$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{5}$ puis en déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

2. On pose $x = \cos\dfrac{\pi}{5}$ et $y = \sin\dfrac{\pi}{5}$
   (a) Exprimer $\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{5}$ en fonction de x et de y.
   (b) Démontrer que $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \sin\dfrac{3\pi}{5}$.
   (c) En déduire les valeurs de x et de y.

Exercice 2 1. Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x \sin^3 x$.

2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{3}{4}\left[3^n \sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - \sin\theta\right]$.

Exercice 3 1. Soient $\theta, \theta' \in [0, \pi[$. Déterminer le module et un argument des nombres :

$$1 + e^{i\theta},\ 1 - e^{i\theta} \text{ et } e^{i\theta} + e^{i\theta'}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z^2 + 2e^{i\theta}z - 1 - 2e^{i\theta} = 0$.

Exercice 4 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle .

1. $\dfrac{5\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ 2. $\dfrac{2}{1 - i\sqrt{3}}$ 3. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^7$ 4. $\dfrac{i(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^4}$

Exercice 5 1. Écrire sous forme exponentielle a) $(1 - i\sqrt{3})^6 e^{3i\pi/4}$ b) $\left(\dfrac{1 + e^{2i\pi/3}}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}\right)^3$.

2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $(1+i)^n$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 6 On considère la transformation du plan complexe d'origine O qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = (1+i)z$.

1. Faire une figure et placer les images des points $A(1)$, $B(2)$ et $C(-1+i)$.
2. Montrer que f est la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O dont on précisera l'angle pour l'une et le rapport pour l'autre.
3. Pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, quelle est la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = re^{i\theta}z$?

Exercice 7 Soit un entier naturel $n \geq 3$ fixé. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines *n-ièmes* de l'unité et on pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. (a) Donner, sans justifier, le nombre d'éléments de $\mathbb{U}_n$, et l'expression de ces éléments en fonction de ω.
   (b) Déterminer le module et un argument de $\omega - 1$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p \in \mathbb{U}_n$, puis déterminer les valeurs de p telles que $\omega^p = 1$.
2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$, en distinguant le cas où $\omega^p = 1$ du cas où $\omega^p \neq 1$.
   (b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, développer $(1+\omega^k)^n$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = 2n$.
3. (a) Calculer la somme triangulaire $\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} \omega^k$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \dfrac{n}{\omega - 1}$. Écrire le résultat précédent sous forme trigonométrique.

Exercice 8 Soit α un nombre de l'intervalle $[-\pi, \pi[$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i\sin\alpha e^{i\alpha} = 0$

1. (a) Écrire cette équation sous la forme $(z-u)^2 = v$ où u et v sont des nombres complexes dépendant de α que l'on donnera sous la forme trigonométrique.
   (b) Résoudre l'équation (E).
   (c) On note z_1 et z_2 les racines de cette équation, M_1 et M_2 leurs images dans le plan. Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment M_1M_2 quand α décrit $[-\pi, \pi[$?
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 quand α est différent de $-\pi$ et de 0.
3. On pose $s_1 = {z_1}^2$ et $s_2 = {z_2}^2$. On appelle S_1 et S_2 les points d'affixes respectives s_1 et s_2.
   (a) O désignant l'origine du plan complexe, montrer que les points S_1, S_2 et O sont alignés.
   (b) Montrer que la longueur du segment S_1S_2 est constante.
   (c) Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment S_1S_2 quand α décrit $[-\pi, +\pi[$?

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 + \dfrac{z+1}{z-1} + 1 = 0$ 2. $z^n = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ 3. $(z+\mathrm{i})^n + (z-\mathrm{i})^n = 0$

4. $(1+z^2)^n - (z-\mathrm{i})^n = 0$ 5. $z^{2n} - 2z^n\cos(n\theta) + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$. 6. $\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$.

Exercice 10 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.