Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1

1. $$\begin{aligned} \cos(x)+\sin(2x)=0 &\iff \cos(x)=-\sin(2x) \\ &\iff \cos(x)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+2x\right) \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\tfrac{\pi}{2}+2x+2k\pi \text{ ou } x=-\tfrac{\pi}{2}-2x+2k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=-\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

2. $2\cos^2(x)+\cos(x)>0 \iff \cos(x)(2\cos(x)+1)>0$

   On pose $X=\cos x$ et on doit étudier le signe du polynôme de degré 2 $X(2X+1)$ qui s'annule en 0 et en $-\dfrac{1}{2}$ et qui est donc positif sur $]-\infty,-\dfrac{1}{2}[\cup]0,+\infty[$.

   Il reste donc à résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos(x)<-\dfrac{1}{2}$ ou $\cos(x)>0$,

   $\cos(x)=0 \iff x=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$, et

   $\cos(x)=-\dfrac{1}{2} \iff x=-\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

   À l'aide du cercle trigonométrique et de ce qui précède, on obtient l'ensemble des solutions :

   $$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[}$$

3. $\tan X<-1 \Leftrightarrow X\in\left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right[$

   ou $X\in\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right[$ Donc

   $$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right[}$$

   ou $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3};-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\right[}$

Exercice 2

1. (a) Les valeurs interdites de l'équation sont $x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ et $\dfrac{\pi}{2}-x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

   c'est-à-dire $\boxed{x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi \text{ et } x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.}$

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}-\{k\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

   $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-x+k\pi \Leftrightarrow 2x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$

   $\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

L'ensemble de ces nombres appartient bien à l'ensemble de définition des termes de l'équation : $\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+k'\pi \Leftrightarrow \frac{k\pi}{2}-k'\pi=\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow k-2k'=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}\notin\mathbb{Z}$
$\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}=k'\pi \Leftrightarrow k-2k'=-\frac{5}{6}\notin\mathbb{Z}$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

2. $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan x-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1+\tan x\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\tan x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan x}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

3. $\alpha=\tan x$ où $x=\frac{5\pi}{12}$. D'après la question 1.(b), x est solution de l'équation (E).

   D'après la question 2. $(E)\Leftrightarrow \frac{\tan x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan x}=\frac{1}{\tan x}\Leftrightarrow \tan x\left(\tan x-\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}\tan x \Leftrightarrow \tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x-1=0$

   $\boxed{\text{donc } \alpha \text{ est solution de l'équation } X^2-2\sqrt{3}X-1=0}$

4. $\Delta=12+4=16, X_1=\frac{2\sqrt{3}-4}{2}=\sqrt{3}-2<0$ et $X_2=\frac{2\sqrt{3}+4}{2}=\sqrt{3}+2>0$

   Or $\alpha>0$ car $\frac{5\pi}{12}\in[0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\boxed{\alpha=\sqrt{3}+2}$

Exercice 3 $\quad f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

Soit $z_0\notin i\mathbb{R}$, $z_{n+1}=f\left(z_n\right)$.

1. (a) $f(z)=0\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=0$ et $z\neq 0\Leftrightarrow z=-\frac{1}{z}=0$ et $z\neq0\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$

   $\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont i et } -\text{i.}}$

   $f(z)=-1\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=-2$ et $z\neq0\Leftrightarrow z+2=-\frac{1}{z}$ et $z\neq0\Leftrightarrow z^2+2z+1=0\Leftrightarrow (z+1)^2=0\Leftrightarrow z=-1$

   $\boxed{-1 \text{ a un unique antécédent par } f \text{ qui est lui-même}}$

   (b) $f(z)=1+\mathrm{i}\Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=2+2_ri$ et $z\neq0\Leftrightarrow z-2-2\mathrm{i}=-\frac{1}{z}$ et $z\neq0\Leftrightarrow z^2+(-2-2\mathrm{i})z+1=0$

   $\Delta=(2+2\mathrm{i})^2-4=4+8\mathrm{i}-4-4=8\mathrm{i}-4=4(2\mathrm{i}-1)=(2\delta)^2$ où $\delta=x+\mathrm{i}y$

   On résout le système :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1\\ 2\mathrm{i}xy=2\mathrm{i}\\ x^2+y^2=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=-1+\sqrt{5}\\ 2y^2=1+\sqrt{5}\\ xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\\ y=\pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\\ xy>0\end{cases}$$

   On peut donc poser $\delta=\frac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}+\mathrm{i}\sqrt{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}+\mathrm{i}\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$ et

   $\boxed{\text{Les antécédents de } 1+\mathrm{i} \text{ par } f \text{ sont } 1+\mathrm{i}+\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}+\mathrm{i}\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}}$

$$\boxed{\text{et } 1+\mathrm{i}-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}-\mathrm{i}\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{4}}$$

2. (a) Si $|z|=1$ alors $z\overline{z}=1$ et $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})=\mathrm{Re}(z)$.

   (b) On en déduit que l'image du cercle trigonométrique par la transformation f est le segment $[-1,1]$ sur l'axe des abscisses.

3. On pose $z=x+\mathrm{i}y$.

   (a) $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{z\times z\overline{z}+\overline{z}}{z\overline{z}}\right)$

   <

   $f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x+\mathrm{i}y)(x^2+y^2)+x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right)$

   $$\boxed{\text{Ré }(f(z))=\frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} \text{ et Im }(f(z))=\frac{y(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)}}$$

   (b) $f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow$ Ré $(f(z))=0\Leftrightarrow x(x^2+y^2+1)=0$ et $z\neq 0\Leftrightarrow x=0$ et $z\neq 0$ car $x^2+y^2+1=0$ est impossible.

   L'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels $f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R}$ est l'axe des ordonnées privé de l'origine.

   (c) La transformation f transforme l'axe des ordonnées privé de l'origine en l'axe des ordonnées, et seules les images des points sur l'axe des ordonnées privé de l'origine sont sur l'axe des ordonnées.

4. (a) La suite (z_n) est bien définie ssi $z_n\neq 0, \forall n\in_b N$.

   Or $z_0\notin\mathrm{i}\mathbb{R}$ et si $z_n\notin\mathrm{i}\mathbb{R}$ alors $z_{n+1}\notin\mathrm{i}\mathbb{R}$ d'après la question 3. (b)

   Par récurrence $z_n\notin\mathrm{i}\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}$ ce qui implique qu'aucun z_n ne vaut i ou $-$i et d'après la question 1. (a), aucun z_n n'est nul.

   (b) Si $z_0\neq -1$ et si $z_n\neq -1$ alors $z_{n+1}\neq -1$ d'après la question 1. (a)

   Par récurrence, $z_n\neq -1,\forall n\in\mathbb{N}$.

5. On suppose désormais $z_0\neq -1$, et on pose $u_n=\frac{z_n-1}{z_n+1}$ pour tout entier naturel n.

   (a) La suite (u_n) est bien définie d'après la question précédente.

   (b) $|u_n|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z_n-1}{z_n+1}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|z_n-1|}{|z_n+1|}=1\Leftrightarrow|z_n-1|=|z_n+1|$

   L'ensemble des points d'affixe z_n tels que $|u_n|=1$ est donc la médiatrice des points d'affixes 1 et -1, qui est l'axe des ordonnées. Or on a déjà démontré que $z_n\notin\mathrm{i}\mathbb{R}$ pour tout n.

   $\boxed{\text{Le module de } u_n \text{ ne peut donc être } 1}$

   (c) $u_{n+1}=\frac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1}$

   Or $z_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(z_n+\frac{1}{z_n}\right)-1=\frac{z_n^2+1-2z_n}{2z_n}=\frac{(z_n-1)^2}{2z_n}$

et $z_{n+1}+1=\dfrac{1}{2}\left(z_n+\dfrac{1}{z_n}\right)+1=\dfrac{z_n^2+1+2z_n}{2z_n}=\dfrac{(z_n+1)^2}{2z_n}$

Donc $\boxed{u_{n+1}=\dfrac{(z_n-1)^2}{(z_n+1)^2}=u_n^2 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$

(d) $u_0^{2^0}=u_0$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

Supposons que $u_n=(u_0)^{2^n}$ à un rang n, on a alors

$u_{n+1}=u_n^2=\left((u_0)^{2^n}\right)^2=(u_0)^{2^n\times 2}=(u_0)^{2^{n+1}}$

On a montré par récurrence que $\boxed{u_n=(u_0)^{2^n} \text{ pour tout entier naturel } n}$