Samedi 21 septembre 2024

Devoir surveillé n° 1

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **4 points** : **1.** 1 **2.** 1.5 **3.** 1.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x) + \sin(2x) = 0$
2. $2\cos^2(x) + \cos(x) > 0$
3. $\tan(3x) + 1 < 0$

Exercice 2 **5 points** : **1.(a)** 0.5 **1.(b)** 1.5 **2.** 1 **3.** 1 **4.** 1

Le but de cet exercice est de calculer la tangente de $\dfrac{5\pi}{12}$.

1. On considère l'équation (E) : $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
   (a) Déterminer les valeurs interdites de l'équation (E).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

2. Exprimer $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ en fonction de $\tan(x)$ puis $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\tan(x)$.

3. On pose $\alpha = \tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

   En vous aidant des deux questions précédentes, montrer que α est solution de l'équation $X^2 - 2\sqrt{3}X - 1 = 0$.

4. Résoudre cette dernière équation et en déduire la valeur de α.

Exercice 3 **11 points** : **1.(a)** 1 **1.(b)** 2 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 0.5 **3.(a)** 1.5 **3.(b)** 0.5 **3.(c)** 0.5 **4.(a)** 0.5 **4.(b)** 0.5 **5.(a)** 0.5 **5.(b)** 1 **5.(c)** 1 **5.(d)** 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

Soit $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On considère la suite de nombres complexes (z_n) de premier terme z_0 telle que $z_{n+1} = f(z_n)$, pour tout entier naturel n.

1. (a) Déterminer le ou les antécédents éventuels par f de 0 et de -1.
   (b) Déterminer le ou les antécédents éventuels par f de $1 + \mathrm{i}$.

2. (a) Montrer que, si $|z| = 1$ alors $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la transformation f ?

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$.
   (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (c) Interpréter géométriquement ce résultat.

4. (a) Montrer que la suite (z_n) est bien définie.
   (b) Montrer que, si $z_0 \neq -1$ alors $z_n \neq -1$ pour tout entier naturel n.

5. On suppose désormais $z_0 \neq -1$, et on pose $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Existe-t-il des valeurs de z_n pour lesquelles le module de u_n est égal à 1 ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Démontrer que $u_n = (u_0)^{2^n}$ pour tout entier naturel n.