Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{2x^2 - x - 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \Longrightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$

Cette dernière équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 > 0$ et pour solutions $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

Réciproquement, -3 et 1 vérifient $\sqrt{2x^2 - x - 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$:

$\sqrt{2(-3)^2 - (-3) - 1} = \sqrt{20} = \sqrt{(-3)^2 - 3 \times (-3) + 2}$, et

$\sqrt{2 \times 1^2 - 1 - 1} = 0 = \sqrt{1^2 - 3 \times 1 + 2}$.

Finalement, par analyse-synthèse, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-3; 1\}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x &\iff 4x^2 - 4x + 1 = (1 - 2x)^2 \text{ et } 1 - 2x \geq 0 \\
&\iff 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \text{ et } x \leq \frac{1}{2} \\
&\iff x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par équivalences successives, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]}$.

On peut aussi résoudre cette équation en écrivant que
$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $||x - 1| - x| \leq 1 \iff -1 \leq |x - 1| - x \leq 1 \iff x - 1 \leq |x - 1| \leq x + 1$.

• <u>Si $x > 1$</u> : $|x - 1| = x - 1$ et on a :

$||x - 1| - x| \leq 1 \iff x - 1 \leq x - 1 \leq x + 1$, ce qui est toujours vrai.

• <u>Si $x \leq 1$</u> : $|x - 1| = 1 - x$ et on a :

$||x - 1| - x| \leq 1 \iff x - 1 \leq 1 - x \leq x + 1 \iff -2 \leq -2x \leq 0 \underset{-2<0}{\iff} 1 \geq x \geq 0$.

Par disjonction des cas, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}_+}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Notons (I) l'inégalité $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$.

   • Si $0 \leq a \leq b$: alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, et on a :

$$\begin{aligned}
(I) &\iff \sqrt{b}-\sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} \\
&\iff \sqrt{b} \leq \sqrt{b-a}+\sqrt{a} \\
&\iff \sqrt{b}^2 \leq \left(\sqrt{b-a}+\sqrt{a}\right)^2 \qquad \text{(tout est positif)} \\
&\iff b \leq b-a+a+2\sqrt{a(b-a)} \\
&\iff 0 \leq 2\sqrt{a(b-a)}.
\end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité étant vraie, par équivalences, l'inégalité (I) est vraie.

   • Si $0 \leq b < a$: Comme
   $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| = \left|\sqrt{b}-\sqrt{a}\right|$ et $\sqrt{|a-b|} = \sqrt{|b-a|}$ l'inégalité (I) est démontrée.

   Par disjonction des cas, $\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ positifs, } \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}}$

Exercice 2

1. $(-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) - 12 = 0$. Ainsi,

   $\boxed{\alpha = -2 \text{ est un nombre entier relatif solution de l'équation } x^3+3x^2-4x-12=0}$.

2. Soient a, b et c trois réels. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
x^3+3x^2-4x-12 &= (x+2)(ax^2+bx+c) \\
\iff x^3+3x^2-4x-12 &= ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c.
\end{aligned}$$

   Ainsi, par identification, $x^3+3x^2-4x-12 = (x+2)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x, si a, b et c vérifient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 3 \\ 2b+c = -4 \\ 2c = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases}.$$

   On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ x^3+3x^2-4x-12 = (x+2)(x^2+x-6)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^3-5}{7-3x} \leq x+1 \\
\iff & \frac{x^3-5}{7-3x} - (x+1) \leq 0 \\
\iff & \frac{x^3-5-(x+1)(7-3x)}{7-3x} \leq 0 \\
\iff & \frac{x^3+3x^2-4x-12}{7-3x} \leq 0 \\
\underset{2.}{\iff} & \frac{(x+2)(x^2+x-6)}{7-3x} \leq 0.
\end{aligned}
$$

L'équation du second degré $x^2+x-6=0$, de discriminant $\Delta = 25 > 0$, admet pour solutions -3 et 2. Dressons le tableau de signes du quotient $Q(x) = \dfrac{(x+2)(x^2+x-6)}{7-3x}$:

x	$-\infty$		-3		-2		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$x+2$			$-$		0			$+$			
x^2+x-6		$+$	0		$-$		0		$+$		
$7-3x$					$+$				0	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[-2, 2\right] \cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[}.$$