Fonctions d'une variable réelle

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Généralités sur les fonctions réelles

Dans ce qui suit, f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$, appelée **ensemble de définition** de f : $\left| \begin{array}{ll} D_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \end{array} \right.$

On note C_f sa courbe représentative, appelée aussi graphe de f, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$C_f = \{M(x,y) : \; y = f(x), \; x \in D_f\} = \{M(x, f(x)), \; x \in D_f\}.$$

1.1 Parité et périodicité

Définition 1.
1. On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f, \; -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
2. On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f, \; -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence : Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à (Oy), celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O. On peut alors étudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}_+$, puis compléter la courbe par symétrie.

Exemple 1. Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité :

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - |x|}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Définition 2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est T **périodique** si

$$\forall x \in D_f, \; x + T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Conséquence : Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On peut alors étudier f sur $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$, puis compléter la courbe par ces translations.

Exemple 2. Étudier la périodicité de la fonction $u : t \mapsto A \sin(\omega t - \varphi)$, où $A, \omega \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1.2 Fonctions et relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 3. Une fonction f est dite :

1. **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$
2. **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$
3. **bornée** si f est majorée et minorée.

Théorème 1. Soit $I \subset D_f$. La fonction f est bornée sur I ssi il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \leq K.$$

Exemple 3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2 - \cos(x)}{1 + x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition 4. Soit $I \subset D_f$. La fonction f est dite :

1. **croissante** sur I si pour tout $a, b \in I,\ a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$

   strictement croissante sur I si pour tout $a, b \in I,\ a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$
2. **décroissante** sur I si pour tout $a, b \in I,\ a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

   strictement décroissante sur I si pour tout $a, b \in I,\ a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$
3. **monotone** sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.

1.3 Opérations sur les fonctions

Définition 5. Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On note $f + g$ la fonction définie sur D par $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$
2. On note λf la fonction définie sur D par $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$
3. On note fg la fonction définie sur D par $fg : x \mapsto f(x)g(x)$
4. Si g ne s'annule pas sur D, on note $\dfrac{f}{g}$ la fonction définie sur D par $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Définition 6. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

On appelle **composée** de f et g la fonction définie par $g \circ f : \left| \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$

Exemple 4. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

1. Écrire f comme composée de deux fonctions.

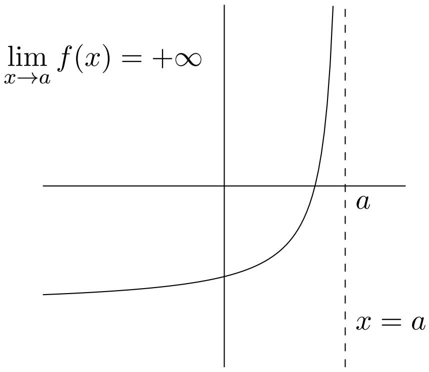
2. Dresser le tableau de variation de f puis tracer l'allure de son graphe.

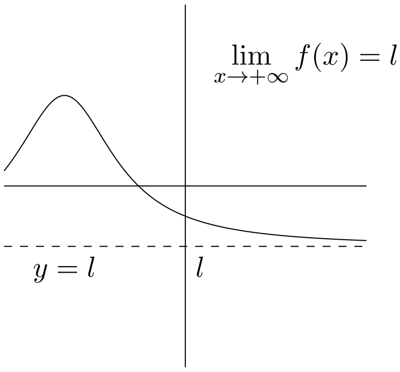
3. En déduire celui de $x \mapsto f(x)+2$, $x \mapsto f(x+2)$, $x \mapsto f(x-2)$, $x \mapsto f(2x)$ et $x \mapsto 2f(x)$.

1.4 Asymptotes horizontales et verticales

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ x_0[$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) alors on dit que la courbe de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Définition 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la courbe de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.





Méthode Limite d'une fraction rationnelle en l'infini : elle est donnée par la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple 5. Déterminer les limites de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 5x - 3}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

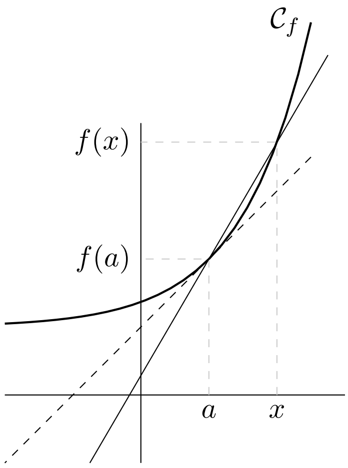
2 Calcul des dérivées et applications

Dans ce paragraphe, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 9. Soit f une fonction définie sur I.

On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque $x \to a$.

Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.



Propriété 1.
1. Si f est dérivable en $a \in I$ alors la courbe C_f admet une tangente en $A(a, f(a))$, de pente $f'(a)$, et d'équation $\quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors la courbe C_f admet une tangente verticale en $A(a, f(a))$.

Exemple 6. Déterminer, si elle existe, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 1 :

a) $f : x \mapsto x^4$ b) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Définition 10. Soit f une fonction définie sur I.
On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point a de I.

Dans ce cas, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f sur I.

Dérivées usuelles

fonction f	domaine de dérivabilité	dérivée
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Propriété 2. Si f et g sont dérivables sur I alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$
3. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$
4. si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Propriété 3. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Cas particuliers : Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u^n : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
2. si $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, la fonction $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. si $ax + b \in I$, $\forall x \in J$, la fonction $g : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $g'(x) = au'(ax+b)$

Exemple 7. Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto (1-3x)^7$ et celle de $g : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.

Propriété 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

1. Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Remarque : On peut être amené à étudier le signe de la dérivée de f', notée f'' et appelée dérivée seconde de f. On définit par récurrence les dérivées *k-ièmes* de f :

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k-1)} \text{ est dérivable et } f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

Plan d'étude d'une fonction : pour une fonction réelle $f : x \mapsto f(x)$.

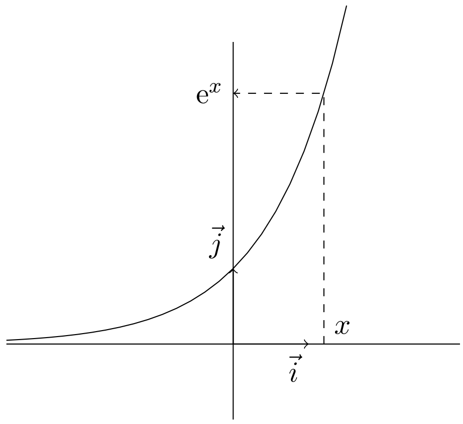
- Domaine de définition.
- Parité et périodicité, réduction éventuelle du domaine d'étude.
- Domaine de dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée et Tableau de variation.
- Limites aux bornes, asymptotes verticales ou horizontales éventuelles.
- Tracé des éventuelles tangentes horizontales et asymptotes verticales et horizontales.
- Tracé du graphe de f.

Exemple 8. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.

3 Étude de fonctions usuelles

3.1 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y' = y$ et $y(0) = 1$. Elle est notée $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$



Propriété 5. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{e}^a > 0 \qquad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$$

Propriété 6. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

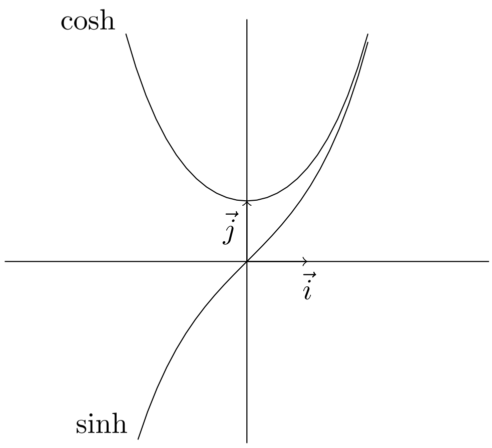
Si u est dérivable sur I alors $\mathrm{e}^u : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\quad (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

Propriété 7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

3.2 Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies par

$$\mathrm{ch}\ : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\ : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$



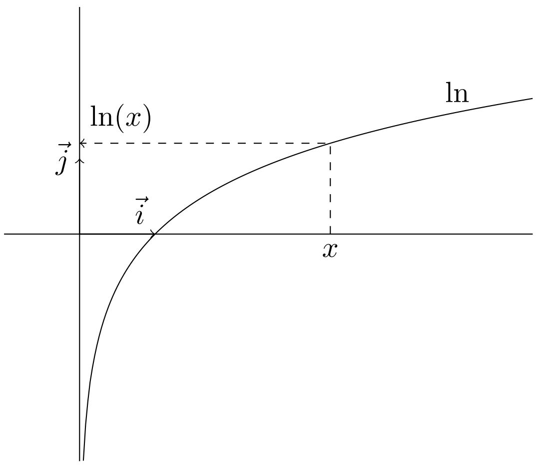
Propriété 8. ch est paire, sh est impaire, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Propriété 9. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ e $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$

Si u est dérivable sur I alors $\mathrm{ch}\, u : x \mapsto \mathrm{ch}\,(u(x))$ et $\mathrm{sh}\, u : x \mapsto \mathrm{sh}\,(u(x))$ sont dérivables sur I et $(\mathrm{ch}\, u)' = u'\mathrm{sh}\, u$ et $(\mathrm{sh}\, u)' = u'\mathrm{ch}\, u$

3.3 Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est l'intervalle $]0,+\infty[$: pour tout réel $x>0$, il existe un unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$, noté $y=\ln(x)$. Ainsi, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction logarithme népérien notée $\ln : x \mapsto \ln(x)$.



Propriété 10. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$b=\ln(a) \iff a=\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{\ln(a)}=a \qquad \ln(\mathrm{e}^b)=b$$

Propriété 11. Pour tout $a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b) \qquad \ln(a^n)=n\ln(a)$$

Propriété 12. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Si u est dérivable sur I et $u>0$ sur I alors $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

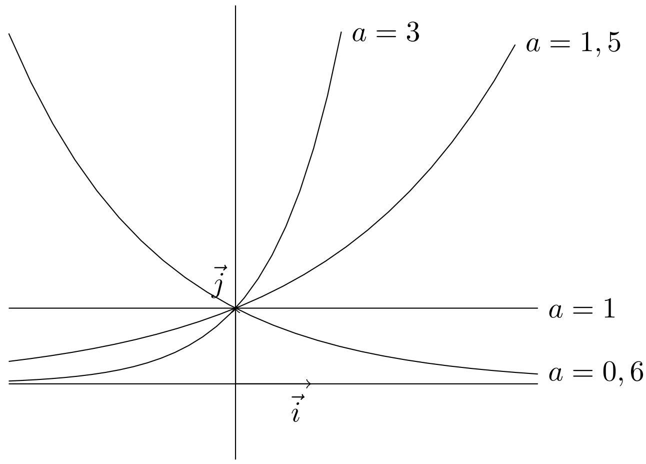
Propriété 13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Cas particulier : La fonction logarithme décimal est définie par $\log : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Elle vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln et $\forall n \in \mathbb{Z},\ \log(10^n)=n$.

3.4 Fonctions exponentielles généralisées

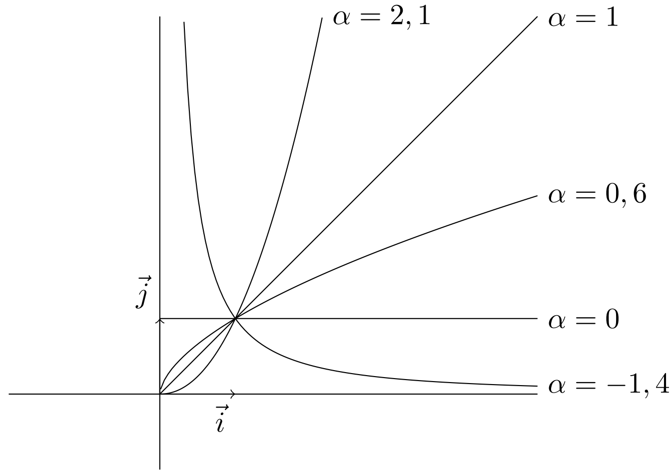
Définition 11. Si $a > 0$, on définit **la fonction exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $a^x = e^{x \ln a}$



Propriété 14. La dérivée de $x \mapsto a^x$ est la fonction $x \mapsto (\ln a)\, a^x$

Si $a > 1$ alors la fonction exponentielle de base a est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Si $0 < a < 1$ alors la fonction exponentielle de base a est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.



3.5 Fonctions puissances

Définition 12. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $x > 0$, alors $\mathrm{e}^{n \ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = x^n$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0, +\infty[$ la **fonction puissance** α notée $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$

Propriété 15. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)\,; \qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$$

Propriété 16. (dérivation) La fonction p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Si u est dérivable et $u > 0$ sur I alors $u^\alpha : x \mapsto (u(x))^\alpha$ est dérivable sur I et

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Cas particuliers : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $p_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $p_{-n} : x \mapsto x^{-n}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. En posant $0^{\frac{1}{n}} = 0$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la **fonction racine n-ième** notée $p_{\frac{1}{n}} : x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

   Ainsi, pour tout $a, b > 0$, $b = a^n \iff a = \sqrt[n]{b}$.

Propriété 17. Croissances comparées Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[\ln(x)]^\beta}{x^\alpha} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{[\ln(x)]^\alpha} = +\infty$

Exemple 9. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition :

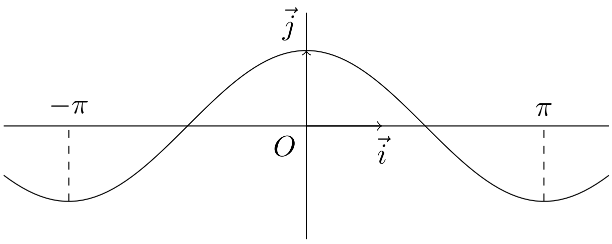
a) $f : x \mapsto 2^x$ b) $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}}$ c) $f : x \mapsto \sqrt[4]{x} e^{-2x}$.

3.6 Fonctions sinus, cosinus et tangente

Propriété 18. La **fonction cosinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et :

$$\cos' = -\sin$$

Si u est dérivable sur I alors $\cos u : x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable sur I et $(\cos u)' = -u' \sin u$

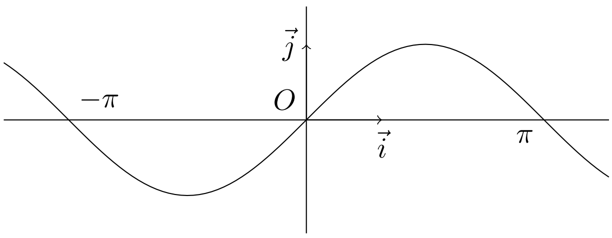


Courbe de $x \mapsto \cos x$

Propriété 19. La **fonction sinus** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et :

$$\sin' = \cos$$

Si u est dérivable sur I alors $\sin u : x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable sur I et $(\sin u)' = u' \cos u$

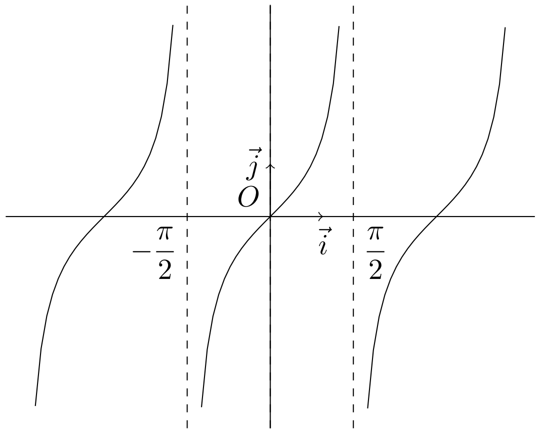


Courbe de $x \mapsto \sin x$

Propriété 20. La **fonction tangente** est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, impaire, π-périodique et : $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$

Si u est dérivable sur I et $u(I) \subset \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors $\tan u : x \mapsto \tan(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$



Courbe de $x \mapsto \tan x$

Propriété 21. $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exemple 10. Étudier la limite de $\dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$ lorsque $x \to 0$.

3.7 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 13. f est une fonction à valeurs complexes s'il existe des fonctions réelles $u : I \mapsto \mathbb{R}$ et $v : I \mapsto \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ \ f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$.

Dans ce cas, u et v sont les parties réelle et imaginaire de f : $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.

f est dérivable sur I ssi u et v sont dérivables sur I. Dans ce cas, $f' = u' + \mathrm{i}v'$

Exemple 11. Déterminer la fonction dérivée de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$

Propriété 22. Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I alors $\exp f : x \mapsto \exp(f(x))$ est dérivable sur I et $(\exp f)' = f' \exp f$.