Correction du Test n° 3

Sujet A

1.
2. $A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in]0, \pi[\right\}$

   $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1, \forall x \in]0, \pi[$ donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure en tant que partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

   Or $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right) = 1$ donc $\sup A = \max A = 1$ et $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{3\pi}}\right) = -1$ donc $\inf A = \min A = -1.$.
3. Étudier les variations de la fonction $f :\mapsto -2x + \ln(x+1)$

   $D_f = D_{f'} =]-1\ ;\ +\infty[$

   f est dérivable sur $D_{f'}$ par composition et somme de fonctions dérivables.

   $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2 = \frac{-2x-1}{x+1}$

   $x + 1 > 0$ sur D_f donc f' est du signe de $-2x - 1$ sur D_f, fonction affine qui s'annule en $x = -\frac{1}{2}$ avec $a = -2 < 0$ ou $-2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Correction du Test n° 3

Sujet B

1.
2. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

   $-1 \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure en tant que partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

   Comme $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \to -1$ lorsque $n \to +\infty$, $\inf A = -1$.

   Mais $-1 \notin A$, donc A n'admet pas de minimum.

   Pour $n > 2, (-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2}$ donc $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$.

3. Étudier les variations de la fonction $f :\mapsto \dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

   $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$

   f est dérivable sur $D_{f'}$ par composition et produit de fonctions dérivables.

   $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{1-x}{x^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

   $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$ sur D_f donc f' est du signe de $\dfrac{1-x}{x^3}$ sur D_f,

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	