

Applications et bijections

1 Ensembles et opérations

Rappels : Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E .

Si x est un élément de E , on note $x \in E$, sinon on note $x \notin E$.

Si x et y représentent le même élément de E , on note $x = y$, sinon on note $x \neq y$.

Un ensemble contenant un seul élément x est appelé singleton, et noté $\{x\}$.

Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide, et noté \emptyset .

Définition 1. Soient E et A deux ensembles.

1. On dit que A est **inclus** dans E si $x \in A \implies x \in E$.

Dans ce cas, on dit que A est une **partie** (ou un sous-ensemble) de E et on note $A \subset E$.

2. On dit que E et A sont **égaux** si $x \in A \iff x \in E$. Dans ce cas, on note $A = E$.

3. **L'ensemble des parties** (ou un sous-ensembles) de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1. Expliciter $\mathcal{P}(E)$ dans le cas où $E = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$, noté \complement_E^A ou $E \setminus A$.

2. **L'intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

3. **La réunion** de A et B est l'ensemble $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemple 2. Lors d'un contrôle, on note S l'ensemble des composants qui ont un défaut de soudure, E celui des composants qui ont un défaut électronique et R celui des composants refusés.

Décrire, à l'aide de ces ensembles, l'ensemble A des composants qui n'ont aucun défaut, B celui des composants qui ont exactement un défaut et C celui des composants pour lesquels il y a une erreur de contrôle.

Propriété 1. Si E est un ensemble et si $A, B \in \mathcal{P}(E)$ alors

1. $\overline{\overline{E}} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{\overline{A}} = A$
2. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **Loi de Morgan**

Exemple 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{ x \in \mathbb{R} / |x - \pi| \leq 10^{-n} \}$.

Déterminer $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$, \overline{U} et \overline{I} .

Définition 3. Soient $E, F, E_1, E_2, \dots, E_n$, des ensembles.

1. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble $E \times F = \{ (x, y) / x \in E \text{ et } y \in F \}$.
2. Le produit cartésien de E_1, E_2, \dots, E_n est l'ensemble

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in E_k \}.$$

3. En particulier, $E^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in E \}$.

Un élément (x_1, x_2, \dots, x_n) de E^n est appelé **n -uplet** (ou n -liste) d'éléments de E .

Exemple 4. Représenter les ensembles \mathbb{N}^2 , $\llbracket 0, 3 \rrbracket \times \llbracket 2, 4 \rrbracket$, $[0, 1] \times \mathbb{R}$ et $[0, 1]^3$.

2 Applications d'un ensemble dans un autre

Définition 4. Soient E et F deux ensembles non vides.

1. On définit une **application** (ou fonction) f de E dans F en associant, à chaque élément x de E , un unique élément de F , noté $f(x)$. Ce qui s'écrit $f : \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$
2. On appelle **graphe** de f l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times F$ tels que $y = f(x)$.
Pour un tel couple, y est l'**image** de x (par f) et x est un **antécédent** de y (par f).
3. On note $\mathcal{F}(E, F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E dans F .

Exemple 5. Définir $\mathcal{F}(\llbracket 1, 4 \rrbracket, \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 5. Soit un ensemble E non vide et $A \in \mathcal{P}(E)$.

La fonction indicatrice de A est l'application $\mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} .$$

Exemple 6. Tracer le graphe des fonctions réelles $u : x \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ et $f : x \mapsto x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Définition 6. Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

On appelle **restriction** de f à A , l'application notée $f|_A$ définie par $f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto f(x) \end{cases} .$

Exemple 7. Déterminer les restrictions à \mathbb{R} des fonctions complexes $z \mapsto |z|$ et $z \mapsto e^z$.

Définition 7. Soient $f : E \rightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. On appelle **image directe** de A par f l'ensemble noté $f(A)$ défini par

$$f(A) = \{ f(x), x \in A \} \subset F.$$

2. On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \} \subset E.$$

Exemple 8. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$

1. Déterminer l'image de l'intervalle $[0, 1[$ par f .
2. Déterminer l'image réciproque de \mathbb{U}_3 par f .

Définition 8. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : E \rightarrow F$ telles que $f(A) \subset E$.

On appelle **composée** de f et g l'application $g \circ f : \begin{cases} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto g(f(x)) \end{cases} .$

Exemple 9. Définir $g \circ f$ si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{1}{2}(x + y) \end{cases}$

Définition 9. Soit $f : E \rightarrow F$.

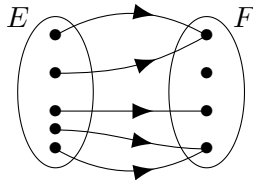
1. f est dite **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E .

2. f est dite **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E .

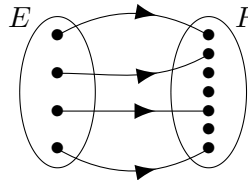
3. f est dite **bijective** si tout élément de F possède un unique antécédent dans E .

Dans ce cas, on appelle (bijection) **réciproque** de f la fonction

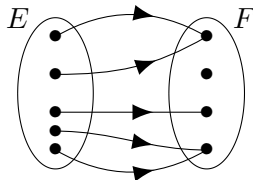
$$f^{-1} : \begin{cases} F & \rightarrow & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{cases}, \text{ où } f^{-1}(y) \text{ est l'unique antécédent de } y \text{ par } f \text{ dans } E.$$



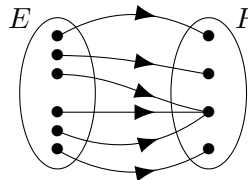
Application non injective



Application injective



Application non surjective



Application surjective

Exemple 10. La fonction f est-elle injective? surjective? bijective?

$$\text{a) } f : \begin{cases} [0, 1[& \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{2i\pi t} \end{cases} \quad \text{b) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \quad \text{c) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{cases}$$

Remarque : $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi pour tout $(x, y) \in E \times F$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution, notée $f^{-1}(y)$:

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Dans ce cas, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

Propriété 2. Soient $f : A \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3 Cas des fonctions réelles

3.1 Généralités

Propriété 3. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction réelle bijective.

Les graphes \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f et f^{-1} (respectivement) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 11. Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ , en explicitant sa réciproque.
2. Tracer l'allure des graphes de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé.

Théorème 1. de la bijection Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle I , alors

1. $f(I)$ est un intervalle,
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
3. f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f .

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair.

- a) Montrer que la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- b) Dresser le tableau de variation de sa réciproque, appelée fonction racine n -ième.

Théorème 2. Soit $f : I \rightarrow J$ bijective et dérivable sur I .

Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Déterminer la dérivée de la fonction racine n -ième.

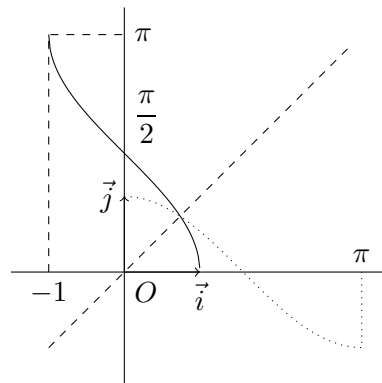
Remarque : Si $f : I \rightarrow J$ est bijective et dérivable sur I , et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ et son graphe admet une tangente verticale en son point d'abscisse $f(a)$.

3.2 Fonction arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

La réciproque de la restriction de cosinus à $[0, \pi]$ est la fonction arccosinus, notée arccos.



Courbe de $x \mapsto \text{Arccos } x$

Propriété 4. La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et

1. $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$
2. $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$ et $\forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos(y)) = y$.

Exemple 14. Calculer $\arccos(0)$, $\arccos(1/2)$, $\arccos(\sqrt{3}/2)$ et $\arccos(-\sqrt{2}/2)$.

Propriété 5. La fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, et

$$\forall x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si u est dérivable sur I et $u(I) \subset] -1, 1[$, alors $\arccos u$ est dérivable sur I et

$$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

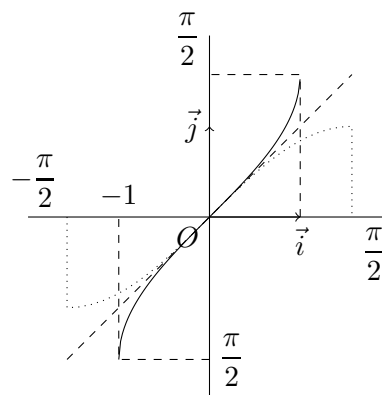
Exemple 15. Étudier la fonction $f : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$.

3.3 Fonction arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$.

La réciproque de la restriction de sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la fonction arcsinus, notée arcsin.



Courbe de $x \mapsto \text{Arcsin } x$

Propriété 6. La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$, impaire, et :

1. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1], y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y)$
2. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$ et $\forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin(y)) = y.$

Exemple 16. Calculer $\arcsin(0)$, $\arcsin(1/2)$, $\arcsin(\sqrt{3}/2)$ et $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$.

Propriété 7. (dérivation) La fonction arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$, et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si u est dérivable sur I et $u(I) \subset] - 1, 1[$, alors $\arcsin u$ est dérivable sur I et

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Propriété 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$

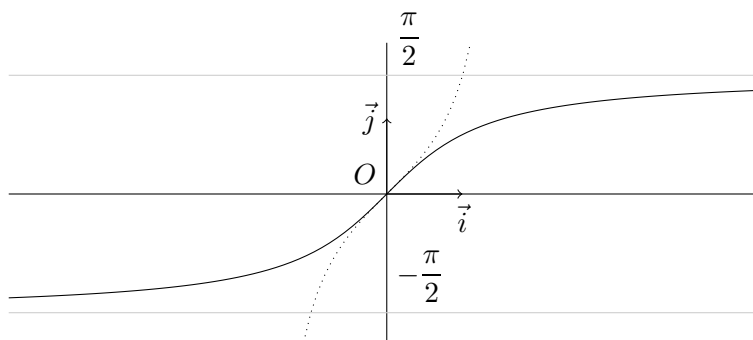
Exemple 17. Étudier la fonction $f : x \mapsto \arcsin(3x + 1)$.

3.4 Fonction arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

La réciproque de la restriction de tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction arctangente, notée \arctan .



Courbe de $x \mapsto \text{Arctan } x$

Propriété 9. La fonction arctan est définie et continue sur \mathbb{R} , impaire, et :

$$1. \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \forall y \in \mathbb{R}, y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$$

$$2. \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(y)) = y.$$

Exemple 18. Calculer $\arctan(0)$, $\arctan(1)$, $\arctan(\sqrt{3})$ et $\arctan(-\sqrt{3}/3)$.

Propriété 10. La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Si u est dérivable sur I , alors la fonction $\arctan u : x \mapsto \arctan(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Propriété 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$

Exemple 19. Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$