Applications et bijections

Exercice 1 Soit E un ensemble, A et B des parties de E.

1. Montrer que $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

2. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) $A \subset B$

   (b) $A \cap B = A$

   (c) $A \cup B = B$

Exercice 2 On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$

1. (a) Déterminer l'ensemble des antécédents du couple $(5,6)$ par f.

   (b) L'application f est-elle injective ?

2. Montrer que l'image de f est $f(\mathbb{R}^2) = D$, où $D = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ a^2 - 4b \geq 0\right\}$.

Exercice 3 Soit $f : E \to F$. Montrer que :

1. $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A \subset f^{-1}(f(A))$

2. $\forall (A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad$ et $\quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4 Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-4y, 2x+3y) \end{array} \right.$ est bijective, puis expliciter sa réciproque f^{-1}.

Exercice 5 Dans chaque cas, déterminer I et J tels que que f est bijective, puis expliciter sa réciproque f^{-1} :

a) $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x^2+4x+1 \end{array} \right.$ b) $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{array} \right.$.

Exercice 6 Soit la fonction $f : \left| \begin{array}{cc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)} \end{array} \right.$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.

2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et une expression simple de sa dérivée.

Exercice 7

1. Calculer $\arccos\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$.

2. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition, et déterminer une expression simple de f :

$f(x) = \tan(\arctan(x))$ $\quad f(x) = \cos(\arctan(x))$ $\quad f(x) = \sin(\arctan(x))$

$f(x) = \cos(\arcsin(x))$ $\quad f(x) = \sin(\arccos(x))$ $\quad f(x) = \tan(\arccos(x))$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2\arccos(x-1) \geq \pi$

2. $\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 9 On considère la fonction $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
   (a) Étudier la parité de la fonction h.
   (b) Étudier les variations et les limites de la fonction h. Dresser son tableau de variation.
   (c) Déterminer les antécédents de -1 et de 1 par h.
2. (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que la fonction g est impaire.
   (c) Donner les valeurs de $g(0)$, $g(1)$, $g\left(\sqrt{3}\right)$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{1-h^2(x)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}$
   (b) Calculer alors $g'(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.
   (c) Justifier que g est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   (d) Démontrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = \pi - 4\,\mathrm{Arctan}(x)$.
   (e) En déduire l'expression de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, -1]$.
4. Tracer l'allure du graphe de g.