

Correction du devoir maison n° 3

1. (a) La fonction $\ln$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est défini ssi $\left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ est défini et strictement positif, ce qui équivaut à $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, car la valeur absolue est positive.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x-1}{-x+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

- (c) $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$ et

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

2. (a) $\forall x \in [0, 1[$, $\frac{x-1}{x+1} < 0$ (signe du trinôme $(x-1)(x+1)$) et $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.

Sur $[0, 1[$, la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et est strictement positive. Donc g est dérivable sur $[0, 1[$ et $\forall x \in [0, 1[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{-1 \times (1+x) - 1 \times (1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1}{(1-x)(1+x)} < 0, \text{ car } (1-x)(1+x) > 0.$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0, 1[$.

Si $x \xrightarrow{x < 1} 1$ alors $\frac{1-x}{1+x} \rightarrow 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$, par composition de limites.

De plus, $g(0) = \frac{1}{2} \ln(1) = 0$. D'où :

x	0	1
$g'(x)$		
$g(x)$	0	

- (b) $g(0) = 0$ et $g'(0) = -1$, donc la courbe de g admet une tangente T en son point d'abscisse 0, d'équation $T : y = -x$.

Considérons la fonction d définie sur $[0, 1[$ par $d(x) = g(x) - (-x)$. Sur $[0, 1[$, d est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in [0, 1[$:

$$d'(x) = g'(x) + 1 = \frac{-x^2}{(1-x)(1+x)} \leq 0. \text{ La fonction } d \text{ est donc décroissante sur } [0, 1[.$$

Comme $d(0) = 0$, $d \leq 0$ sur $[0, 1[$, et $\boxed{\text{le graphe de } g \text{ est en-dessous de } T \text{ sur } [0, 1[}$.

- (c) Sur la figure ci-dessous, le graphe de g est la portion de courbe située entre l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $x = 1$.

3. (a) Si $x > 1$, $\frac{1}{x} \in [0, 1[$ et $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1, +\infty[}$ comme composée de deux fonctions strictement décroissantes.

Si $x \xrightarrow{x>1} 1$ alors $\frac{1}{x} \rightarrow 1^-$ et $g\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\infty$, par composition des limites.

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty}$.

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ et $g\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$, par composition des limites.

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$. D'où

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0

- (b) On complète la courbe de f sur $]1, +\infty[$. La fonction f étant impaire, on complète sa courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

