Correction du Test n° 4

Sujet A

Exercice 1 Étudier la fonction $f: x \longmapsto \left(\sqrt{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\ln x}$

$D_f = \mathbb{R}_+^* = D'_f$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x + 1)f(x)$ est du signe de $\ln x + 1$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$

$f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}\frac{\ln(\mathrm{e}^{-1})}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ par composition

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ par composition

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 On pose $z_1 = -(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-(\sqrt{3}+i)}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{-\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + i^2}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$
2. $z_1 = -(\sqrt{3}+i) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\frac{5i\pi}{6}}$

   $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$

   $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{5i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5i\pi}{6}-\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{13i\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{11i\pi}{12}}$

Correction du Test n° 5

Sujet B

Exercice 1 Étudier la fonction $f : x \longmapsto x^{2x} = \mathrm{e}^{2x\ln(x)}$

$D_f = \mathbb{R}_+^* = D'_f$

$f'(x) = 2(\ln x + 1)f(x)$ est du signe de $\ln x + 1$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$

$f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1})} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ par composition

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ par composition

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1 On pose $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ $\quad z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ $\quad$ et $\quad Z = z_1 z_2^2$

1. $z_2^2 = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^2 = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 1 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

   $Z = z_1 z_2^2 = (1 + \mathrm{i})(2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}) = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + 2\mathrm{i} - 2\sqrt{3} = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}(2 + 2\sqrt{3})$

2. $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$

   $z_2 = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{6}}$

   $z_2^2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$

   $Z = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{3}} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{12}}$