

Correction du devoir maison n° 4

On note f la fonction définie sur $] - 1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e.$$

2. $\frac{1}{x} \ln(1 + x) = \frac{x + 1}{x} \times \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}$ pour tout $x \in] - 1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} = 0$ par croissances comparées donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = 0 \text{ par produit et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$$

donc C_f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$

Correction 2 $\frac{1}{x} \ln(1 + x) = \frac{1}{x} \ln(x(\frac{1}{x} + 1)) = \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(\frac{1}{x} + 1)}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\frac{1}{x} + 1) = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = 0 \text{ par somme et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$$

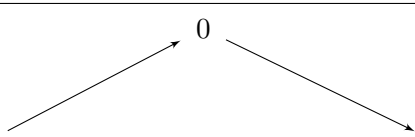
3. Montrons que $\forall x \in] - 1 ; +\infty[$, $-\ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1} \leq 0$

On pose $g(x) = -\ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1}$

g est définie et dérivable sur $-1 ; +\infty[$ car $x + 1 > 0$ sur cet intervalle.

$$g'(x) = -\frac{1}{x + 1} + \frac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{-x}{(x + 1)^2}$$

$] - 1 ; +\infty[$

x	-1	0	+	+
$g'(x)$		0	-	
$g(x)$		0		

D'après le tableau précédent, $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in] - 1 ; +\infty[$ i.e

$$\forall x \in] - 1 ; +\infty[, \quad -\ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1} \leq 0$$

4. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$

f est dérivable sur $] - 1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ car $1 + x > 0$ sur cet ensemble et le quotient $\frac{1}{x}$ a un dénominateur non nul sur cet ensemble.

$$f'(x) = \varphi'(x)f(x) \text{ où } \varphi(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x)$$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-(x+1)\ln(x+1) + x}{x^2(x+1)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x+1) \left(-\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right)}{x^2(x+1)} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ et $f > 0$ sur $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ donc f' est du signe de g sur cet ensemble, c'est à dire $f'(x) \leq 0$ sur $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \ln(1+x) = +\infty$ par produit donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ par composition

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	e	1