Correction du devoir maison n° 4

On note f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}$.

2. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour tout $x\in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0$ par croissances comparées donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=0$ par produit et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^0=1$

   donc C_f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y=1$

   Correction 2 $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\dfrac{1}{x}\ln(x(\dfrac{1}{x}+1))=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln(\frac{1}{x}+1)}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{1}{x}+1)=0$ donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=0$ par somme et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^0=1$

3. Montrons que $\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[,\quad -\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\leqslant 0$

   On pose $g(x)=-\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

   g est définie et dérivable sur $-1\ ;\ +\infty[$ car $x+1>0$ sur cet intervalle.

   $g'(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1+1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$ est du signe de $-x$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   D'après le tableau précédent, $g(x)\leqslant 0\quad\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[$ i.e

   $\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[,\quad -\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\leqslant 0$

4. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   f est dérivable sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ car $1+x>0$ sur cet ensemble et le quotient $\dfrac{1}{x}$ a un dénominateur non nul sur cet ensemble.

   $f'(x)=\varphi'(x)f(x)$ où $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-(x+1)\ln(x+1)+x}{x^2(x+1)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x+1)\left(-\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ et $f > 0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ donc f' est du signe de g sur cet ensemble, c'est à dire $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = +\infty$ par produit donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$ par composition

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$ e	‖	e $\searrow 1$	