

Devoir maison n° 5

A rendre le jeudi 17 octobre 2024

Exercice 1 Soient les deux points $A(1)$ et $B(-1)$ du plan complexe.

On considère la transformation qui à tout point $M(z)$ distinct de A associe le point $M'(z')$ défini par

$$z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$$

1. Montrer que $|z'| = 1$ et que $\frac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
2. En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M .
3. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{AM'B}$?

Exercice 2

1. Dans cette question, A, B et C ont pour affixes respectives $1 - 2i$, $1 + \sqrt{3} + i$ et $1 - \sqrt{3} + i$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. A, B et C sont trois points non alignés d'affixes respectives a, b et c et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
 - (a) Calculer j^3 , $1 + j + j^2$ et montrer que $\bar{j} = j^2$.
 - (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle θ .
 - (c) Montrer que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.
 - (d) En déduire que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.