Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t\cos t$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
3. Tracer cette tangente et la courbe de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$

1. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f.
2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Étudier les variations de la fonction f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum et le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Déterminer dans chaque cas si la fonction f est minorée, majorée, ou bornée sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 2\cos^2 x + 3\sin x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ sur $I =]-1, +\infty[$

c) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{1-x}$ sur $I =]0, 1[$ d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 4 Dans chaque cas, étudier la fonction f.

a) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ b) $f : x \longmapsto \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

Exercice 5 Résoudre les équations suivantes

1. $e^x + e^{1-x} = e + 1$ 2. $2\mathrm{ch}\,(x) + 3\mathrm{sh}\,(x) = 2$ 3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

4. $2^{x^3} = 3^{x^2}$ 5. $x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *Chercher une solution α telle que α^2 est aussi une racine.*

Exercice 6 Étudier les fonctions suivantes

1. $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1+\cos t)\sin t \end{array} \right.$ 2. $g : x \longmapsto x^{\sqrt{x}}$

Exercice 7

1. Démontrer que $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $\sin x \leq x \leq \tan x$

5. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$

Exercice 8

1. Dans chaque cas, calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

   a) $f(x) = x\ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\ln(x)$ b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)}$

2. Dans chaque cas, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$:

   a) $f(x) = \dfrac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}}$ pour tout $a > 1$ b) $f(x) = \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 9 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera D_f.

   (b) Étudier la parité de f.

   (c) Démontrer que $\forall x \in D_f \backslash \{0\}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;1[$.

   (a) Étudier la fonction g et dresser son tableau de variations.

   (b) Étudier la position relative du graphe de g et de sa tangente au point d'abscisse 0.

   (c) Tracer l'allure du graphe de g dans un repère bien choisi.

3. (a) Déduire des questions 1. (c) et 2. (a) le tableau de variations de f sur $]1,+\infty[$.

   (b) Compléter alors le graphe de g pour obtenir l'allure du graphe de f.