Devoir maison n° 6

A rendre le jeudi 7 novembre 2024

Exercice 1 Soit n un entier naturel non nul. On note $a_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_n^k$

1. Calculer A_4 sous forme algébrique et vérifier que cette somme est égale à $\dfrac{2}{1-a_4}$
2. Montrer que $A_n = \dfrac{2}{1-a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|a_n^k - 1\right|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Retrouver géométriquement ce résultat pour $n = 4$.

Exercice 2 On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ et on note $\mathrm{A} = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ et $\mathrm{B} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que l'application f réalise une bijection de A vers B et déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'image réciproque du cercle trigonométrique $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ et celle du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant 1\}$.
3. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 3 On considère la fonction $\varphi : t \mapsto \arcsin(\sin(2t))$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et π-périodique.
2. Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi(t) = 2t$, et que $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(t) = \pi - 2t$.

Exercice 4 On considère les fonctions g et h définies par

$$g(x) = \arcsin(2x-1) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right).$$

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g et calculer $g'(x)$.
2. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de h et calculer $h'(x)$.
3. En déduire une relation entre g et h.