Calculs algébriques et systèmes linéaires

1 Sommes et produits simples

Propriété 1. Soit n un entier naturel non nul.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Pour tout $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 1. On lance, chaque minute, un dé à 6 faces bien équilibré.

1. Calculer la probabilité p_n d'obtenir le premier 6 à l'instant n.
2. Calculer la probabilité que le premier 6 apparaisse entre les instants n et $2n$.

Propriété 2. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right)$

Exemple 2. On pose $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, où $a, b, c, z \in \mathbb{C}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.

Définition 1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et I une partie finie de $\mathbb{N}$.

On note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ la somme des termes u_i d'indices $i \in I$.

On note $\displaystyle\prod_{i\in I} u_i$ le produit des facteurs u_i d'indices $i \in I$.

Cas particulier : Si $I = [\![p, n]\!]$, où p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{n} u_i = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n$$

et le nombre de termes ou de facteurs est $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} 1 = n-p+1$

Le résultat ne dépend pas de l'indice i, qui est muet : $\displaystyle\sum_{\mathbf{i}=p}^{n} u_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}=p}^{n} u_{\mathbf{k}}$ et $\displaystyle\prod_{\mathbf{i}=p}^{n} u_{\mathbf{i}} = \prod_{\mathbf{k}=p}^{n} u_{\mathbf{k}}$

Exemple 3. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k$

Propriété 3. Linéarité de la somme Soient (u_k) et (v_k) deux suites de nombres complexes.

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k \qquad \text{et } \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \sum_{k=p}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} u_k$$

Exemple 4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(3\mathrm{i})^k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(3k-1)$.

Remarque : Le produit n'est pas linéaire. En revanche, il vérifie :

$$\prod_{k=p}^{n}(u_k \times v_k) = \prod_{k=p}^{n} u_k \times \prod_{k=p}^{n} v_k \quad , \quad \prod_{k=p}^{n} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} u_k}{\prod_{k=p}^{n} v_k} \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n}(\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k$$

2 Quelques méthodes de calcul

Propriété 4. Découpage Soit (u_k) une suite de nombres complexes.

Pour tout $p, q, n \in \mathbb{N}$ tels que $p < q < n$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} u_k = \prod_{k=p}^{q} u_k \times \prod_{k=q+1}^{n} u_k$$

Remarque : On peut regrouper les termes ou facteurs d'indices pairs, et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{p \leq 2k \leq n} u_{2k} + \sum_{p \leq 2k+1 \leq n} u_{2k+1} \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} u_k = \prod_{p \leq 2k \leq n} u_{2k} \times \prod_{p \leq 2k+1 \leq n} u_{2k+1}$$

Propriété 5. Télescopage Soit (u_k) une suite de nombres complexes.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p < n$,

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p \quad \text{et, si les } u_k \text{ ne sont pas nuls,} \quad \prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

Exemple 5. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Propriété 6. Changement d'indice Soit (u_k) une suite de nombres complexes.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p < n$, si $m \in \mathbb{Z}$ et $j = k + m$ alors

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+m} = \sum_{j=p+m}^{n+m} u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} u_{k+m} = \prod_{j=p+m}^{n+m} u_j.$$

Exemple 6. Calculer $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - (k-1)^3\right].$

Remarque : On peut aussi utiliser l'inversion de l'ordre des termes ou facteurs $j = n + p - k$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_{n+p-k} = \sum_{j=p}^{n} u_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} u_{n+p-k} = \prod_{k=j}^{n} u_j$$

Exemple 7. Calculer $\quad P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{3k}{n+1-k}$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

Définition 2. Soient $p, n \in \mathbb{N}$.

1. Si $n \neq 0$, on appelle factorielle de n le produit des entiers de 1 à n, noté $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$

   Par convention $0! = 1$.

2. Si $p \leq n$, le coefficient binomial "p parmi n" est défini par $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

   Par convention, $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Cas particuliers : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, $\quad (n+1)! = (n+1) \times n!$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Triangle de Pascal

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété 7. Formule de Pascal Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Théorème 1. Formule du binôme de Newton Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 8. Calculer $z = (2+\mathrm{i})^5$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

4 Sommes doubles

Théorème 2. et définition. Soit $(u_{i,j})$ une suite de complexes indexée par deux indices i et j, et $p, n, q, m \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$ et $q \leq m$.

On note $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} u_{i,j}$ la somme des termes $u_{i,j}$ pour i variant dans $[\![p,n]\!]$et j dans $[\![q,m]\!]$ et

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} u_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=q}^{m} u_{i,j}\right) = \sum_{j=q}^{m}\left(\sum_{i=p}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n} u_{i,j}$$

Exemple 9. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+1)j^2$.

Propriété 8. Produit de sommes simples Soient (u_i) et (v_j) deux suites complexes.

Si $p, n, q, m \in \mathbb{N}$ vérifient $p \leq n$ et $q \leq m$ alors

$$\left(\sum_{i=p}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=q}^{m} v_j\right) = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} u_i v_j = \sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n} u_i v_j$$

Remarque : On peut être amené à calculer des sommes doubles dont les indices de sommation ne sont pas indépendants comme, par exemple, les sommes triangulaires :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{1\leq i<j\leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j}.$$

Exemple 10. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$ et $T_n = \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$.

5 Équations linéaires à deux ou trois inconnues dans $\mathbb{R}$

5.1 Équations de droites dans le plan

Rappel 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $(a,b) \neq (0,0)$, alors l'ensemble des points $M(x,y)$ d'équation cartésienne $ax+by=c$ est une droite D admettant $\overrightarrow{n}(a,b)$ pour vecteur normal et $\overrightarrow{u}(-b,a)$ pour vecteur directeur.

Exemple 11. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les droites : $D_m : mx + y = 1$ et $\Delta_m : x + my = 1$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m les droites D_m et Δ_m sont-elles parallèles ?
2. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre m, l'intersection des droites D_m et Δ_m.

5.2 Équations de plans dans l'espace

Rappel 2 : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Si $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ est tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble des points $M(x, y, z)$ d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ est un plan P admettant $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ pour vecteur normal.

Exemple 12. Dans chaque cas, déterminer l'intersection des trois plans :

1. $P : 2y - z = 0$, $Q : 2x - 3y + 2z = 0$ et $R : x - 2y = 0$
2. $P : -x + 2y - z = 0$, $Q : 2x - 4y + 2z = 0$ et $R : x - 2y + z = 0$
3. $P : 5x + 2y - z = 0$, $Q : 2x + 2y + 2z = 0$ et $R : x - 2y - 5z = 0$

6 Systèmes de n équations linéaires à p inconnues

Définition 3. On appelle **système** de n équations linéaires à p inconnues tout système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \dots & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$, les b_i et les x_j sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés respectivement coefficients, seconds membres et inconnues du système (S).

On appelle **solution** de (S) tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les n équations linéaires.

Le système (S) est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.

On appelle système homogène associé à (S), le système (S_H) obtenu en annulant les seconds membres.

Remarque : Le système linéaire homogène (S_H) est toujours compatible car il admet le p-uplet nul comme solution.

Exemple 13. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 3 \\ 4x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 4. On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes L_i d'un système linéaire, les opérations suivantes :

- une permutation, qui est l'échange de L_i avec une autre ligne L_j, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- une dilatation, qui est la multiplication de L_i par un scalaire non nul, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- une transvection, qui est l'ajout à L_i d'un multiple d'une ligne L_j, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Remarque : L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ est l'enchaînement de deux opérations élémentaires : une dilatation suivie d'une transvection.

Propriété 9. Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Application : Algorithme du pivot de Gauss

Soit (S), un système linéaire de coefficients $a_{i,j}$, de seconds membres b_i et d'inconnues x_j, avec $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

1. On cherche une ligne L_i où l'inconnue x_1 à un coefficient $a_{i,1}$ non nul (si possible égal à 1 pour simplifier les calculs) et on l'échange avec L_1 par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_i$.

   Ensuite, on élimine l'inconnue x_1 dans les autres lignes en s'appuyant sur ce pivot par des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$, pour $i \in [\![2, n]\!]$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a'_{1,1}x_1 & + & a'_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a'_{1,p}x_p & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & + & a'_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a'_{n,p}x_p & = & b'_n \end{array}\right.$$

   Si, dans le système (S), tous les coefficients de x_1 sont nuls, on applique la méthode précédente à la première colonne dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

2. On conserve la ligne L_1 du système précédent, puis on cherche un pivot non nul pour éliminer, de même, l'inconnue x_2 dans $n - 2$ des lignes restantes. Et ainsi de suite ...

3. On obtient ainsi, un système dit échelonné qui est équivalent à (S) :

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \quad \dots \quad + \alpha_{1,p}x_p = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{2,2}x_2 + \quad \dots \quad + \alpha_{2,p}x_p = \beta_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad \alpha_{r,r}x_r + \dots + \alpha_{r,p}x_p = \beta_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \beta_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \beta_n \end{cases}$$

Exemple 14. Résoudre les systèmes suivants par application de l'algorithme de Gauss :

$$(S_1) : \begin{cases} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ -x & + & y & + & 6z & = & 7 \end{cases}.$$

Définition 5. Soit (S) un système linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$.

• On appelle **pivot** d'une ligne non nulle de (S) le premier coefficient non nul de cette ligne à partir de la gauche.

• On dit que le système (S) est **échelonné** si le pivot d'une ligne se trouve à droite du pivot de la ligne précédente et si la nullité des coefficients d'une ligne entraîne la nullité des coefficients des lignes suivantes.