École Ouverte 21/10/2024 – corrections

1 Fonctions

Exercice 1 $a'(x) = 6(4x-1)\left(2x^2-x-1\right)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad b'(x) = 2 + \dfrac{9}{(x-2)^4}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
$c'(x) = \text{Arccos }\ (1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ sur $]0,2[$. À noter que c est encore dérivable en 0 avec $c'(0) = 0$ en étudiant le taux d'accroissement :

$$\frac{c(x)-c(0)}{x} = \text{Arccos}\,(1-x) \xrightarrow{x\to 0} \text{Arccos}(1) = 0$$

.

$d'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ sur $]-1,1[$ $\qquad e'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln(x)}}$ sur $]0,\mathrm{e}[$

$f'(x) = 3x^2(1-x)e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$

$h'(x) = \left(\ln(\operatorname{ch}x) + x\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)(\operatorname{ch}x)^x$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad k'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2

(a) $\ln\left(2x^2+1\right) - 1 = \ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x^2+1 = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$ et $x > -\dfrac{1}{2}$
$\Delta = 4(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2) > 0, x = \dfrac{\mathrm{e}\pm\sqrt{\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2}}{2} > -\dfrac{1}{2}$

(b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$ et $x > 0$ en posant $X = \ln x$ on obtient $X = 1$ ou $X = -4$ puis $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^{-4}$

(c) $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$ et $x > 0 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0$ et $x > 0$ donc l'unique solution est $x = 1$

(d) $\ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2)$ et $x > 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

(e) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$ on trouve $X = 1$ ou $X = -2$ (impossible) donc la seule solution est $x = 0$

(f) $2e^x = e^{x^2} \Leftrightarrow \ln 2 + x = x^2, \Delta = 1 + 4\ln 2, x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$

(g) $e^x - 4e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 4 = \mathrm{e}^x$ et en posant $X = \mathrm{e}^x$ on obtient $X = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ et l'unique solution est $x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

(h) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a > 0$, $a \neq, x > 0, x \neq 1 \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln^2 a \Leftrightarrow \ln x = \pm \ln a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = \dfrac{1}{a}$ ces solutions étant strictement positives et différentes de 1.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3} - \dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}} > 0$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x} \geq \dfrac{1}{2}$ $S =]-\infty, \dfrac{\ln 2}{2}]$

(b) $e^x < \dfrac{1}{4}e^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - x - \ln 4 > 0$ et $S =]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{1+4\ln 4}}{2}[\cup]\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln 4}}{2}, +\infty[$

(c) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$ pour $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[, S = [\dfrac{2}{1-\mathrm{e}}, -1[$

(d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2$ pour $x \neq 0, S =]-\infty, 0[\cup[\ln 3, +\infty[$

(e) $e^x \geq e^{2x} - 1, S =]-\infty, \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)]$

(f) $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) > 2$ pour $x > 0, S =]\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+\sqrt{\mathrm{e}^4+4}}{2}\right), +\infty[$

Exercice 4

1. $\sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2} = e^x - 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
2. $e^x - e^{-x} = 2m \Leftrightarrow x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right), \forall\, m \in \mathbb{R}$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

(a) $\ln(x+1) - \ln(2x-3) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-3} = \dfrac{1}{2}$ comme limite d'une fraction rationnelle, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3)) = -\ln 2}$ par composition.

(b) $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \sqrt{x}\ln x + \sqrt{x}\ln(x+1)$
Or $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x+1) = 0$ par produit donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0}$ par somme.

(c) $x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-3x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = 0}$ par croissance comparée.

(d) $e^x - 3x^2 - 1 = x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 3x^2 - 1\right) = +\infty}$ par croissance comparée et produit.

(e) $\ln(x) - x^2 = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x) - x^2\right) = -\infty}$ par croissance comparée et produit.

(f) $\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0}$ par produit.

(g) $xe^{-x^2} = \dfrac{1}{x}x^2e^{-x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0}$ par produit.

(h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1} = \dfrac{x+2}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{1}{X}+2}{1+X}$ en posant $X = \dfrac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0_+$

$\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{X}+2\right)\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\dfrac{X}{X+1}$ avec $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} + 2 = 2$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{X+1} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle.

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$ par produit.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{e^x} = \dfrac{\ln(x)}{x}\dfrac{x}{e^x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0}$ par croissance comparée et produit.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0,+\infty[$ par $d(x) = x^2\ln x - x + 1$.

   (a) d est 2 fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $d'(x) = 2x\ln x + x - 1$, $d''(x) = 2\ln x + 3$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   (b) $d''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		1		$+\infty$
$d''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$d'(x)$	$\|$ -1	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

   (c) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to0} d'(x) = -1$ et $d'(1) = 0$. D'après le tableau de variation ci-dessus, on en déduit que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$.

   On peut aussi remarquer que $2x\ln x \leq 0$ et $x - 1 \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et conclure par somme.

(d) On déduit également des variations de d' et de $d'(1) = 0$ que $d'(x) > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$d(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que $d(x) \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$.

2. $f(1) = 0$ et $f'(x) = 2x \ln x + x$ donc $f'(1) = 1$

   $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -x + 1$

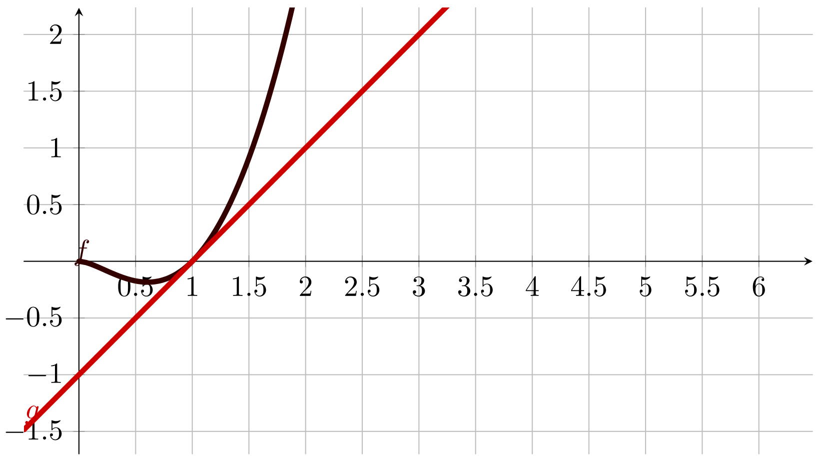
   Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y = x - 1$

3. $f(x) - (x - 1) = d(x) \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$ donc la courbe de f est au dessus de cette tangente sur $]0, +\infty[$.

4. $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ est du signe de $2 \ln x + 1$ car $x > 0$

   $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et on en déduit les variations de f sur $]0, +\infty[$.

   De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x t o + \infty} f(x) = +\infty$ par produit



Exercice 7 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

   $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$, or $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x| \geq -x$ donc $\sqrt{1+x^2} > -x$ donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.

   Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = e^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \left(e^2 - x\right)^2$ car $1 + x^2 \geq 0$

   donc $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^4 - 2e^2 x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4-1}{2e^2}$. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e^4-1}{2e^2}\right\}$.

   Or $e \approx 2,7$, donc $\dfrac{e^2}{2} \approx \dfrac{7,29}{2}$, et $\dfrac{1}{2e^2} < 0,1$, donc $\dfrac{e^4-1}{2e^2} \approx 3,6$ au dixième près.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.

   $f(x) + f(-x) = \ln\left[\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] = \ln\left(1 + x^2 - x^2\right) = \ln 1 = 0$.

   (b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.

   $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   (b) Étudier les variations de f.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

   $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc l'équation de T est : $y = x$.

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$.

   $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = \dfrac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} = \dfrac{e^{f(x)} - e^{f(-x)}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2} - (-x) - \sqrt{1+x^2}\right) = x$

   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et comme f est impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   Comme f est strictement croissante, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$, donc f et sinus hyperbolique sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

   (c) En déduire très facilement la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.

   $\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow x = f(2)$ donc $\mathcal{S} = \left\{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$.

Exercice 8

1. $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1 = X^2 + X + 1$ où $X = \operatorname{sh} x$. Or le trinôme n'a pas de racine réelle et est donc à valeurs > 0 vu le coefficient de X^2.

2. On considère maintenant la fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.

   h est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et

   $h'(x) = \operatorname{ch}(x)\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} - 1$ et

   $h''(x) = \operatorname{sh}(x)\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} + \operatorname{ch}^2(x)\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch}^2 x)\mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} = \psi(x)e^{\operatorname{sh}(x)}$ car $\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1$

   pour tout x.

3.

x	-1		0		1
$h''(x)$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	-1		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   On en déduit que h est positive sur $[-1,1]$.

4. Pour tout $x \in [0,1[$ $1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh}(x)}$ car $h(x) \geqslant 0$ sur $[0,1[$

   De plus, $h(-x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(-x)} + x - 1 \geqslant 0$ sur $[0,1[$. Or $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$ pour tout x, d'où $\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}(x)} \geqslant 1 - x > 0$ pour tout $x \in [0,1[$ puis $\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in [0,1[$, car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans l'encadrement précédent, on remplace x par $\dfrac{1}{k} \in [0,1[$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $0 < 1 + \dfrac{1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{k}}$

   On en déduit que $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{k}}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

   Or $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

   et de même, $\ln\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{k}}\right) = \ln(k) - \ln(k-1)$

En sommant cet encadrement pour k allant de n à pn et en remarquant que les sommes de droite et de gauche sont télescopiques (sommes de différences successives), on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 ,

$\ln(np+1) - \ln n \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(np) - \ln(n-1)$, i.e

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{pn}{n-1}\right)$$

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = p$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln p$ par encadrement.

2 Nombres complexes

Exercice 1

1. $a = \frac{(2-\mathrm{i})^2}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(4-4\mathrm{i}-1)(1-2\mathrm{i}}{5} = -1-2\mathrm{i}$

   $b = \frac{5+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{3+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = \frac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{10} - \frac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{26}$

   $b = \frac{13(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) - 5(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{130} = \frac{8}{65}(7+4\mathrm{i})$

   $c_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{6n} = \cos(n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants (où x est un paramètre réel) :

   $a = \frac{3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{3}{2(1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)} = \frac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $b = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}\right)^9 = \mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

   $c = -a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $d = \frac{-3b}{ia^2} = \frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \times \frac{9}{4}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $\mathrm{e} = \sin(x) - \mathrm{i}\cos(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}$

   $f = \frac{1-\mathrm{i}\tan(x)}{1+\mathrm{i}\tan(x)} = \frac{\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x)}{\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

3. $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2\mathrm{i}$.

   a)$P(\mathrm{i}) = 0$.

   b)$P(z) = P(z) - P(\mathrm{i}) = z^3 - \mathrm{i}^3 + 3(z^2 - \mathrm{i}^2) + 3(z-\mathrm{i})$

   $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z + \mathrm{i}^2) + 3(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) + 3(z-\mathrm{i})$

$P(z) = (z - \mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1 + 3z + 3\mathrm{i} + 3) = (z - \mathrm{i})(z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i})$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \mathrm{i}$ ou $z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i} = 0$

$\Delta = (3 + \mathrm{i})^2 - 4(2 + 3\mathrm{i}) = 9 + 6\mathrm{i} - 1 - 8 - 12\mathrm{i} = -6\mathrm{i} = 6\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

$\delta = \sqrt{6}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$

$z_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 - \sqrt{3})}{2}$ et $z_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})}{2}$

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1.
2. $\dfrac{c - a}{d - a} = \dfrac{2i - (-1 + i)}{2 - 2i - (-1 + i)} = \dfrac{1 + i}{3 - 3i} = \dfrac{(1 + i)(3 + 3i)}{18} = \dfrac{i}{3}$ imaginaire pur donc le triangle ACD est rectangle en A.
3. On considère le point I d'affixe 1. On a $AI = |-1 + i - 1| = |-2 + i| = \sqrt{5}$,

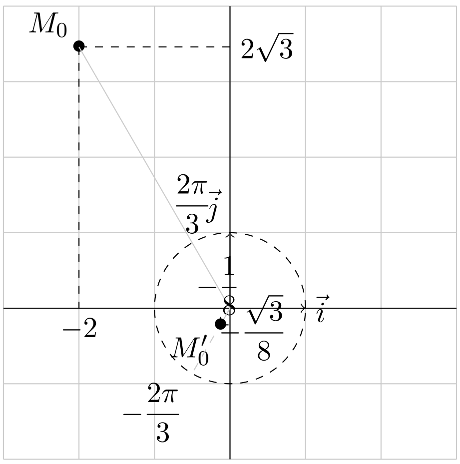
   $BI = |-1 - i - 1| = |-2 - i| = \sqrt{5}$, $CI = |2i - 1| = \sqrt{5}$, $AI = |2 - 2i - 1| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$.

   Donc les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 3

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).



   (b) $z_0 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   (c) $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

   (d)

2. Pour $x \neq 0$

(a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

(b) $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$ car $x \neq 0$.

donc $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ car $|z|$ est un nombre positif.

3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.

   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

   $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$.

   (b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big)$.

   $abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big) = a\overline{a}bc + ab\overline{b}c + abc\overline{c} = bc + ac + ab$ car $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$.

   (c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

   Par Qb) : $|ab + ac + bc| = \big|abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big)\big| = |a|.|b|.|c|.\,\big|\overline{a+b+c}\big| = |a+b+c|$.

Exercice 4 On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, l'équation s'écrit $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

   $\Delta = -2 = \big(i\sqrt{2}\big)^2$ donc les solutions de l'équation sont :

   $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.

   $\Delta = (2\sin t)^2 - 4 = 4\left(\sin^2 t - 1\right) = -4\cos^2 t = (2i\cos t)^2$,

   donc $z_1 = \dfrac{2\sin t - 2i\cos t}{2} = \sin t - i\cos t = e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$,

   et $z_2 = \dfrac{2\sin t + 2i\cos t}{2} = \sin t + i\cos t = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$.

3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$.

   D'après ce qui précède, on a $z^2 = e^{i\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$.

   Donc $\mathcal{S} = \left\{e^{i\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, -e^{i\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}, -e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)}\right\}$

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$ $\quad (E)$

1. $\cos(4\theta) = 1 \Leftrightarrow 4\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = k \times \dfrac{\pi}{2}$. $\quad \mathcal{S} = \left\{k \times \dfrac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. $\quad \mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).

   On a $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ donc $\left|\alpha^3\right| = |\overline{\alpha}|$ donc $|\alpha|^3 = |\alpha|$, donc, d'après la question précédente, $|\alpha|$ est égal à -1 (exclu), ou 0 ou 1.

4. $z = 0$ est clairement une solution de (E). Toute autre solution serait nécessairement de module 1 et pourrait donc s'écrire $z = e^{i\theta}$.

   Alors $z^3 = \overline{z} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{4i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos(4\theta) = 1$.

   D'après 1., les solutions de (E) sont finalement 0, $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{2i\frac{\pi}{2}} = -1$, et $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Exercice 6 Posons $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. $A + B = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 4$
2. $A - B = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$

   $= 2\cos\dfrac{3\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = \cos\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{1}{2} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = -\dfrac{1}{2}$, car $\pi - \dfrac{\pi}{9} = \dfrac{8\pi}{9}$.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.

   $$\begin{cases} A + B = 4 \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{4} \\ B = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Exercice 7 Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

   $$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

   $$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) - (z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$$
   $$= \frac{1+\bar{a}za\bar{z} - z\bar{z} - a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-a\bar{a})(1-z\bar{z})}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$
2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

   On a $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1$

   D'après la question précédente, c'est équivalent à $\dfrac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0$

   or par hypothèse, $1 - |a|^2 \geq 0$, et bien sûr $|1-\bar{a}z|^2 \geq 0$

   donc c'est encore équivalent à : $1 - |z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$.

   L'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$ est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 8

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. $\boxed{\cos^2(k\theta) = \dfrac{1+\cos(2k\theta)}{2}}$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) $e^{2i\theta} = 1 \iff 2\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Donc $e^{2i\theta} \neq 1$ et
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (e^{2i\theta})^k = \frac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}$.
   En factorisant par l'angle de moitié, on obtient :
   $S_n = \dfrac{\left(e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta}\right)e^{i(n+1)\theta}}{\left(e^{-i\theta}-e^{i\theta}\right)e^{i\theta}} \underset{\text{Euler}}{=} \dfrac{-2i\sin((n+1)\theta)e^{in\theta}}{-2i\sin(\theta)}$.
   Donc $\boxed{S_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}e^{in\theta}}$, avec $\lambda = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\alpha = n\theta \in \mathbb{R}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta) \underset{1.}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{1+\cos(2k\theta)}{2} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$.
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1 = n+1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{2i\theta})^k\right) \underset{2.(a)}{=} \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}}$.

3. Si $\theta = \pi/9$ et $n = 4$, on obtient :

$$1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(5\pi/9)\cos(4\pi/9)}{2\sin(\pi/9)}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right].$$

Comme $\sin(\pi) = 0$, on a :
$1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \dfrac{5}{2}+\dfrac{\sin(\pi/9)}{4\sin(\pi/9)} = \dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{4}$.
Donc, $\boxed{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \dfrac{11}{4}}$.

Exercice 9 Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z-4+3i}{z-2+i}$

1. $f(2-5i) = \dfrac{2-5i-4+3i}{-4i} = \dfrac{-2-2i}{-4i} = \dfrac{1+i}{2i} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}$.
   Donc $\boxed{f(2-5i) = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}}$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-i\}$, on a :

$$f(z) = \omega \iff \frac{z-4+3i}{z-2+i} = \omega \iff z-4+3i = z\omega+(-2+i)\omega \iff z(1-\omega) = 4-3i+(-2+i)\omega.$$

$\boxed{\text{Si } \omega \neq 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ admet pour unique solution } z_0 = \dfrac{4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega}{1-\omega}}$.

$\boxed{\text{Si } \omega = 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ n'admet pas de solution}}$, car

$4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega = 2-2\mathrm{i} \neq 0$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$. On a :

$$f(z) = z \iff \frac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = z \iff z-4+3\mathrm{i} = z^2+(-2+\mathrm{i})z \iff z^2+(-3+\mathrm{i})z+4-3\mathrm{i} = 0,$$

qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-3+\mathrm{i})^2 - 4(4-3\mathrm{i}) = -8+6\mathrm{i}$.

On cherche $\delta = x+\mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, tel que

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2-y^2 & = & -8 \\ 2xy & = & 6 \\ x^2+y^2 & = & \sqrt{(-8)^2+6^2} = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & = & 3 > 0 \end{cases}.$$

Donc $\delta = 1+3\mathrm{i}$ convient et les solutions de l'équation $f(z) = z$ sont

$$\boxed{z_1 = \frac{3-\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \frac{3-\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i}},$$

qui sont les affixes des seuls points du plan invariants par f.

4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$.

Correction géométrique :
$|f(z)| = 1 \iff \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$ où $A(4-3\mathrm{i}$, $B(2-\mathrm{i})$ et $M(z)$

Donc $\boxed{E \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$, qui ne contient pas le point B évidemment.

Correction analytique :
$|f(z)| = 1 \iff \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \iff |z-4+3\mathrm{i}|^2 = |z-2+\mathrm{i}|^2$,
car tout est positif. Donc

$$|f(z)| = 1 \iff (\overline{z}-4-3\mathrm{i})(z-4+3\mathrm{i}) = (\overline{z}-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) \iff -2(z+\overline{z})-2\mathrm{i}(z-\overline{z})+20 = 0$$

En posant $z = x+\mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 2)\}$, on a $|f(z)| = 1 \iff x-y-5 = 0$

On vérifie que $z = 2-\mathrm{i}$ n'est pas solution

Donc $\boxed{E \text{ est la droite d'équation } x - y - 5 = 0}$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{2 - \mathrm{i}\}$.

Correction géométrique :

$f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où $A(4 - 3\mathrm{i}$, $B(2 - \mathrm{i})$ et $M(z)$

$\boxed{F \text{ est le cercle de diamètre [AB], privé du point B}}$

Correction analytique : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{\left(\dfrac{z - 4 + 3\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}\right)} = -\dfrac{z - 4 + 3\mathrm{i}}{z - 2 + \mathrm{i}}$ donc

$f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff (\overline{z} - 4 - 3\mathrm{i})(z - 2 + \mathrm{i}) = (4 - 3\mathrm{i} - z)(\overline{z} - 2 - \mathrm{i}) \iff 2z\overline{z} - 6(z + \overline{z}) - 4\mathrm{i}(z - \overline{z}) + 11 = 0.$

En posant $z = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 2)\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff (x^2 + y^2) - 6x + 4y + 11 = 0 \\ &\iff (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9 + 4 - 11 = 2. \end{aligned}$$

Or $x = 2, y = -1$ est solution de cette équation donc

$\boxed{F \text{ est le cercle de centre } \Omega\,(3 - 2\mathrm{i}) \text{ de rayon } r = \sqrt{2}, \text{ privé du point } B \text{ d'affixe } 2 - \mathrm{i}}$.

3 Bijections

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, -\mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x + 1$ et en divisant par $\mathrm{e}^x + 1 > 0$ on obtient $-1 < f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ par quotient et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc f prend toute valeur < 1 et toute valeur > -1. Ainsi, $\boxed{J = f(\mathbb{R}) =]-1, 1[}$.

2. $y = f(x) \Leftrightarrow y(\mathrm{e}^x + 1) = \mathrm{e}^x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(y - 1) = -1 - y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{1 + y}{1 - y}$ et $y \neq 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right)$ et $y \in]-1, 1[$

   Pour tout $y \in]-1, 1[$, il existe alors un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et $\begin{array}{rccc} f^{-1} : &]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) \end{array}$

Exercice 2 $z' = f(z) = z + 2\bar{z} \Leftrightarrow x' + \mathrm{i}y' = 3x - \mathrm{i}y$ donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans lui-même avec $z = \dfrac{x'}{3} - \mathrm{i}y'$

Or $\alpha z + \beta\bar{z} = (\alpha+\beta)x + \mathrm{i}(\alpha-\beta)y$ donc $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha - \beta = -1$ d'où $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{2}{3}$ et $\boxed{f^{-1}(z) = -\dfrac{1}{3}\,z + \dfrac{2}{3}\bar{z}}$

Exercice 3 $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$z' = f(z) \Leftrightarrow z' = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ et $z \neq \mathrm{i} \Leftrightarrow z'(z-\mathrm{i}) = z + \mathrm{i}$ et $z \neq \mathrm{i} \Leftrightarrow z(z'-1) = \mathrm{i} + \mathrm{i}z$ et si $z' \neq 1, z = \dfrac{\mathrm{i}(z'+1)}{z'-1}$ donc l'application f est bijective de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{i\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{i}(z+1)}{z-1} \end{array}$$

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 > 0$. Donc $\boxed{u \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$u'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+x^2}.$$
Comme $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ u'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ donc $|u(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ car $\sqrt{1+x^2} > 0$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < u(x) < 1$. Donc $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme composée de fonctions définies et dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$h'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - [u(x)]^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)}$.

3. On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = \arctan(x) + C$.

   $h(0) = \arcsin(0) = 0 = \arctan(0)$ donc $C = 0$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = \arctan(x)}$.

Exercice 5

1. Pour tout réel x, $f(x) = 3^x\left(3^x - 3\right) + 2 = \mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(\mathrm{e}^{x\ln(3)} - 3\right) + 2$.

   $\ln(3) > 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$, par opérations sur les limites.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\mathrm{e}^{x\ln(3)} + 2$.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions dérivables et

   $f'(x) = 2\ln(3)\mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(3)} = 2\ln(3)3^{2x} - 3\ln(3)3^x = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \frac{3}{2}\right)$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x)$ est du signe de $3^x - \dfrac{3}{2}$ car $2\ln(3)3^x > 0$. De plus,

   $3^x - \dfrac{3}{2} > 0 \Longleftrightarrow 3^x > \frac{3}{2} \underset{\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\Longleftrightarrow} x\ln(3) > \ln(3/2) \underset{\ln(3)>0}{\Longleftrightarrow} x > \dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$

   $f\left(\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{2\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} - 3\mathrm{e}^{\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} + 2 = \mathrm{e}^{\ln(9/4)} - 3\mathrm{e}^{\ln(3/2)} + 2 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f(x) = 0 \Longleftrightarrow (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = 3^x \end{cases}$ trinôme du second degré de racines évidentes 1 et 2. Donc

   $f(x) = 0 \Longleftrightarrow (3^x = 1 \text{ ou } 3^x = 2) \Longleftrightarrow (x\ln(3) = \ln(1) \text{ ou } x\ln(3) = \ln(2))$

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } S = \left\{0; \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}}$

   À l'aide du tableau de variation de f, on en déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection et le tableau de variation de f,

$\boxed{f \text{ réalise un bijection de } I \text{ dans l'intervalle } f(I) = J = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[}$.

6. Soit $y \in \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ fixé quelconque et $x \in \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$.

$y = f(x) \iff (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = y \iff \left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = y + \iff \left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = y + \dfrac{1}{4}$

De plus, $y + \dfrac{1}{4} \geq 0$ et $x\ln(3) \geq \ln(3/2)$ (car $\ln(3) > 0$) donc $3^x \geq \dfrac{3}{2}$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$). Donc

$y = f(x) \iff 3^x - \dfrac{3}{2} = \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \iff 3^x = \dfrac{3}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \iff x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}}\right)$

D'où $\boxed{f_{|I}^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[& \longrightarrow & \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln 3}, +\infty\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}\right)}{\ln 3} \end{array}\right.}$

4 Sommes et produits

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 2^{-k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k+1}$ $(z \in \mathbb{C})$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{2k-1}$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k^2}$

Corrigé

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}} = \sum_{k=0}^{n} 2 \times \left(\frac{3}{2^2}\right)^k = 2\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 8\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k+1} = z\sum_{k=1}^{n} (z^2)^k = \begin{cases} z \times z^2 \dfrac{(z^2)^n - 1}{z^2 - 1} & \text{si } z \neq \pm 1 \\ nz & \text{si } z = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z^{2n+3} - z^3}{z^2 - 1} & \text{si } z \neq \pm 1 \\ n & \text{si } z = 1 \\ -n & \text{si } z = -1 \end{cases}$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 2^{2k} = \frac{1}{2^n} 2^{\sum_{k=1}^{n} 2k} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^n} = \frac{2^{n^2+n}}{2^n} = 2^{n^2}$

5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k^2} = \prod_{k=1}^{n} 2^{k^2} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = 2^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Exercice 2 Exprimer avec des factorielles :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}$ 2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ 3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k)$ 4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$

Corrigé

1. Avec un changement d'indice $j = n - k$ dans le produit du dénominateur :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (n-k)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} j} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2. On utilise les règles d'un produit

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \prod_{k=1}^{n} k \cdot \prod_{k=1}^{n} (k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (k+2) \\
&= n! \cdot \prod_{j=2}^{n+1} j \cdot \prod_{j=3}^{n+2} j \\
&= n!(n+1)! \frac{(n+2)!}{2} \\
&= \frac{(n!)(n+1)!(n+2)!}{2}
\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour écrire $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$ à l'aide de factorielles, on remarque que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$$

On introduit alors les nombres pairs au numérateur et au dénominateur

$$u_n = \frac{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} = \frac{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2}{(2n)!}$$

On exploite enfin tous les facteurs 2 du produit des nombres pairs :

$$2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}}$$

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, z^{k-1}$.

1. Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, z^k$.
2. En déduire une expression simplifiée de $zS_n - S_n$, puis de S_n.

Solution

1. Par changement d'indice $j = k - 1$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) z^j$$

2. On suppose que $z = 1$. Alors $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

On suppose $z \neq 1$. Alors

$$zS_n - S_n = z\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k = \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$$

On régroupe les termes d'indices communs et par linéarité :

$$zS_n - S_n = nz^n + \sum_{k=0}^{n-1}(k-(k+1))z^k = nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = nz^n - \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

Soit

$$(z-1)S_n = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{z - 1}$$

Finalement

$$\boxed{S_n = \frac{nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1}{(z-1)^2}}$$

Exercice 4 Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin^6 t$ en fonction de $\cos(2kt)$ pour $k \in [\![0;3]\!]$.
2. Exprimer $\cos(6t)$ en fonction de $\cos t$.

Corrigé

1. Avec les formules d'Euler $\sin^6 t = \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^6$, on trouve en développant avec le binôme

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$\boxed{\sin^6 t = \frac{1}{32}\left(-\cos(6t) + 6\cos(4t) - 15\cos(2t) + 10\right)}$$

2. Avec la formule de Moivre : $\cos(6t) = \Re((\cos t + \mathrm{i}\sin t)^6)$. On obtient en développant avec le binôme et prenant la partie réelle :

$$\boxed{\cos(6t) = 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1}$$

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq n} \binom{i}{j}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer les produits $\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} i^j$ et $\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j}$

Solution

1. On a

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{i}{j}}_{=0 \text{ si } j>i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} \overset{\text{binôme}}{=} \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Puis

$$\sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k} \overset{\text{binôme}}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\times 2^i \overset{\text{binôme}}{=} (2+1)^n = 3^n$$

2. Le 1$^{\text{er}}$ produit n'est pas "symétrique". Il y a donc deux approches :

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^j = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} i^j\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^j\right) = \prod_{j=1}^{n}(n!)^j = (n!)^{\sum_{j=1}^{n} j} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} i^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\sum\limits_{j=1}^{n} j}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

On trouve ainsi dans les deux cas

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Attention avec les produits ! on sort les constantes élevées à la puissance du nombre de facteurs :

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} &= \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x^i x^j\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\left(x^i\right)^n \prod_{j=1}^{n} x^j\right)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^n\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n\end{aligned}$$

Là encore, les variables étant muettes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^{2n} = \left(x^{\sum\limits_{i=1}^{n} i}\right)^{2n} = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{2n}$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = x^{n^2(n+1)}}$$

5 Ensembles et dénombrement élémentaire

Exercice 1 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E telles que :

$$A\cap B = A\cup C \quad \text{et} \quad A\cup B = A\cap C$$

Montrer que $A = B = C$.

Corrigé On a évidemment $A \subset A \cup C$. Or on donne $A \cup C = A \cap B$. Comme on sait que $A \cap B \subset B$ on en déduit que $A \subset B$.

De même $B \subset A \cup B = A \cap C$ donc $B \subset C$.

Enfin $C \subset A \cup C = A \cap B \subset A$ donc $C \subset A$.

On a donc prouvé que $A \subset B \subset C \subset A$. En particulier $A \subset B \subset A$ donc $A = B$ par double inclusion.

De même $A \subset C \subset A$ donc $A = C$. Finalement on a bien établi $A = B = C$.

Exercice 2 Soient E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Soient A, B deux parties de E.

1. Montrer que la réunion définissant $A \bigtriangleup B$ est disjointe.
2. Montrer que $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A} \bigtriangleup \overline{B} = A \bigtriangleup B$.
4. Simplifier $A \bigtriangleup E$, $A \bigtriangleup \varnothing$, $A \bigtriangleup \overline{A}$.
5. Résoudre l'équation $A \bigtriangleup X = \varnothing$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Solution

1. On peut réécrire $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ de sorte que

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$$

d'où $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$

2. On calcule le membre de droite

$$\begin{aligned}(A \cup B) \setminus (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (\underbrace{A \cap \overline{A}}_{=\varnothing}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (\underbrace{B \cap \overline{B}}_{=\varnothing}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= A \Delta B\end{aligned}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}\overline{A} \Delta \overline{B} &= (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap (\overline{\overline{A}})) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) \\ &= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ \overline{A} \Delta \overline{B} &= A \Delta B\end{aligned}$$

4. On a facilement

$$\begin{aligned}&A \Delta E = E \setminus A = \overline{A} \\ &A \Delta \varnothing = A \setminus \varnothing = A \\ &A \Delta \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \setminus (A \cap \overline{A}) = E \setminus \varnothing = E\end{aligned}$$

5. Soit $X \subset E$ telle que $A \Delta X = \varnothing$, soit $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = \varnothing$ et donc $A \setminus X = \varnothing = X \setminus A$ (sinon la réunion serait non vide). La première égalité $A \setminus X = \varnothing$ équivaut à $A \subset X$, et la deuxième $X \setminus A = \varnothing$, à $X \subset A$, soit par double inclusion, nécessairement $X = A$.
   Réciproquement, si $X = A$ alors on a déjà calculé $A \Delta A = \varnothing$ et donc A est bien solution de l'équation.
   Par conséquent : $A \Delta X = \varnothing \Longleftrightarrow X = A$.

Exercice 3 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées. Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.

   Combien ont-ils de menus possibles ?

Corrigé

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert.

   Par principe multiplicatif, on peut constituer $4 \times 3 \times 5 = 60$ menus différents.
2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées. En supposant que ces 2 entrées soient différentes, il a $\binom{4}{2} \times 3 = 18$ possibilités pour constituer son menu.

   Remarque : si l'on suppose que l'on peut prendre 2 entrées identiques, il faut encore rajouter les 4 possibilités de 2 entrées identiques au choix des entrées précédent, et donc $8 \times 3 = 24$ possibilités de menus.
3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.
   Ils ont $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ menus possibles.

Exercice 4 Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Combien y a-t-il de numéros :

1. commençant par 01 ?
2. constitués de 6 chiffres distincts ?
3. contenant deux fois exactement le chiffre 5 ?
4. ne contenant que des chiffres pairs ?
5. ayant ses six chiffres en ordre strictement croissant ?

Corrigé Notons qu'il y a 10^6 numéros de téléphones au total.

1. Le numéro composé commence par 01.

   Il ne reste que les 4 derniers chiffres à choisir librement soit 10^4 numéros commençant par 01.

2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts il s'agit donc de dénombrer les 6-arrangements de $[\![0;9]\!]$. On a $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ numéros possibles.

3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5. Il ne faut pas oublier de tenir compte de la position des deux 5 : il y a $10^4 \times \binom{6}{2} = 15 \times 10^4$ numéros possibles.

4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs donc on cherche le nombre de 4-listes de $\{0;2;4;6;8\}$ soit 5^6 possibilités.

5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

   Il suffit de choisir les six chiffres apparaissant dans le numéro pour connaitre le numéro (puisque l'ordre sera alors imposé), ce qui donne $\binom{10}{6} = 210$ numéros possibles.