Correction du Devoir maison n° 5

Exercice 1 $\quad z'=\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}, z\neq 1$

1. **Correction 1** $|z-1|=|\overline{z-1}|=|\overline{z}-1|=|1-\overline{z}|$.

   Donc pour $z\neq 1,\quad |z'|=\left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right|=1$.

   Correction 2 On a pour
   $z\neq 1,\quad |z'|=\left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right|=\dfrac{|1-z|}{|\overline{z}-1|}=\dfrac{|1-x-\mathrm{i}y|}{|x-\mathrm{i}y-1|}=\dfrac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=1.$

   On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z\neq 1$,

   $\boxed{|z'|=\mathrm{O}M'=1}$

   Calculons pour $z\neq 1$, le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1}=\dfrac{\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1}=\dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)((\overline{z}-1)}$.

   Le numérateur : $1-z-\overline{z}+1=2-(z+\overline{z})=2-2x\in\mathbb{R}$;

   Le dénominateur : $(z-1)((\overline{z}-1)=(z-1)\overline{z-1}=|z-1|^2\in\mathbb{R}_+$ (réel positif).

   Finalement $\boxed{\dfrac{z'-1}{z-1}\in\mathbb{R}}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z'-1=k(z-1)$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{A}M'}=k\overrightarrow{\mathrm{A}M}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

   Cas $k=0$ $k=0\Leftrightarrow x=1$ et dans ce cas M' et A sont confondus.

2. D'après la question précédente, M$'$ est aligné avec A et M et appartient au cercle trigonométrique. $\boxed{M' \text{ est donc l'intersection de ce cercle et de la droite } (AM).}$

   Cette intersection est vide dans 2 cas :

   • Dans le cas où M a pour abscisse 1 (M et A non confondus), $k=0$ et la droite (AM) est tangente au cercle en A, on obtient $z'=1$ d'après le calcul précédent et l'image de M est le point A.

   • Dans le cas où M est sur le cercle trigonométrique, M et M' sont alors confondus.

3. L'angle $\widehat{AM'B}$ est un angle droit car $[AB]$ est un diamètre du cercle trigonométrique et M' est un point de ce cercle, sauf dans le cas où M' et A sont confondus.

Exercice 2

1. Dans cette question, A, B et C ont pour affixes respectives $1-2\mathrm{i}$, $1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $1-\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

   $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{\sqrt{3}+3\mathrm{i}}=\dfrac{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

   Donc $AC=AB$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc $\boxed{\text{ABC est équilatéral de sens direct.}}$

2. Dans cette question, A, B et C sont trois points non alignés d'affixes respectives a, b et c.

(a) On pose $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Les nombres $1, \mathrm{j}$ et j^2 sont les racines cubiques de l'unité.

Donc $\boxed{\mathrm{j}^3 = 1 \text{ et } 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0}$

De plus $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$, car $\dfrac{-2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$. Donc $\boxed{\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}}$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre A et d'angle θ associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} AM' & = & AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) & = & \theta\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'-a}{z-a}\right| & = & 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-a}{z-a}\right) & = & \theta\ [2\pi] \end{cases} \iff \frac{z'-a}{z-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Donc

$\boxed{\text{la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \theta \text{ a pour écriture complexe } z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a) + a}$

(c) Notons r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. ABC est équilatéral ssi $C = r(B)$ (ABC direct) ou $B = r(C)$ (ABC indirect).

$C = r(B) \iff c = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(b-a) + a \iff \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}(b-a) + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} a \iff c\mathrm{j} = -b + a(1+\mathrm{j})$.

Donc $C = r(B) \underset{1+\mathrm{j}=-\mathrm{j}^2}{\iff} c\mathrm{j} = -b - a\mathrm{j}^2 \underset{\mathrm{j}^3=1}{\iff} c\mathrm{j}^2 = -b\mathrm{j} - a \iff a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0 \;\; (1)$.

En échangeant les rôles de B et C on a : $B = r(C) \iff a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j} = 0 \;\; (2)$.

Par (1) et (2), $\boxed{ABC \text{ est équilatéral ssi } a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0 \text{ ou } a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j} = 0}$

(d) Donc ABC est équilatéral ssi

$$\begin{aligned}
& a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0 \text{ ou } a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j} = 0 \\
\iff & (a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2)(a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}) = 0 \\
\iff & a^2 + b^2\mathrm{j}^3 + c^2\mathrm{j}^3 + ab\mathrm{j}^2 + ac\mathrm{j} + ab\mathrm{j} + bc\mathrm{j}^2 + ac\mathrm{j}^2 + bc\mathrm{j}^4 = 0 \\
\iff & a^2 + b^2 + c^2 + ab(\mathrm{j}^2 + \mathrm{j}) + ac(\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) + bc(\mathrm{j}^2 + \mathrm{j}) = 0, \quad \text{car } \mathrm{j}^4 = \mathrm{j} \\
\iff & a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0, \quad \text{car } \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} = -1.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{ABC \text{ est équilatéral ssi } a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc}$

Avec les valeurs de la question 1., on a :

$a^2 + b^2 + c^2 = (1-2\mathrm{i})^2 + (1+\sqrt{3}+\mathrm{i})^2 + (1-\sqrt{3}+\mathrm{i})^2 = 3$, et

$ab + ac + bc = (1-2\mathrm{i})(1+\sqrt{3}+\mathrm{i}) + (1-2\mathrm{i})(1-\sqrt{3}+\mathrm{i}) + (1+\sqrt{3}+\mathrm{i})(1-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = 3$.

Donc $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ et ABC est équilatéral.