# Primitives

**Exercice 1** Déterminer le domaine de définition de $F$, étudier ses variations et son signe.

1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (t+2)\ln^3(t+1)\mathrm{d}t$ 2. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

**Exercice 2** 1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\sin(x)\mathrm{d}x$.

2. Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$.

Calculer $J+K$, $J-K$, puis $J$ et $K$.

**Exercice 3** Déterminer la primitive de $f$ qui s'annule en $a$ :

1. $f : x \mapsto x^n \ln(x)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $a = 1$ 2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(nx)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $a = \pi$

3. $f : x \mapsto (1 + x - 2x^2)\mathrm{e}^{-2x}$, $a = 0$.

**Exercice 4** Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$, $x = \ln(t)$ $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$, $x = \tan(t)$

2. $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t + t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$. $L = \displaystyle\int_2^7 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$, $t = v^2 - 2$.

*Pour $L$, on cherchera des réels $a$, $b$ et $c$ tels que* $\forall v \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $\dfrac{2v^2}{v^2-1} = a + \dfrac{b}{v-1} + \dfrac{c}{v+1}$.

**Exercice 5** On considère la fonction $f : t \mapsto (t - \lfloor t \rfloor)^2$.

1. Étudier la fonction $f$ et tracer l'allure de son graphe.
2. Calculer $a_0 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Interpréter ce résultat.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_k = 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(2\pi kt)\mathrm{d}t$ et $b_k = 2\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(2\pi kt)\mathrm{d}t$.
4. Comparer le graphe de $f$ avec celui de $g : t \mapsto a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{4} [a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)]$.

**Exercice 6** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

1. Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{n-1}{n} \times u_{n-2}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, sous forme de produits, les termes $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\quad u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$.
6. En déduire la valeur de $\ell$.