Correction du devoir maison n° 6

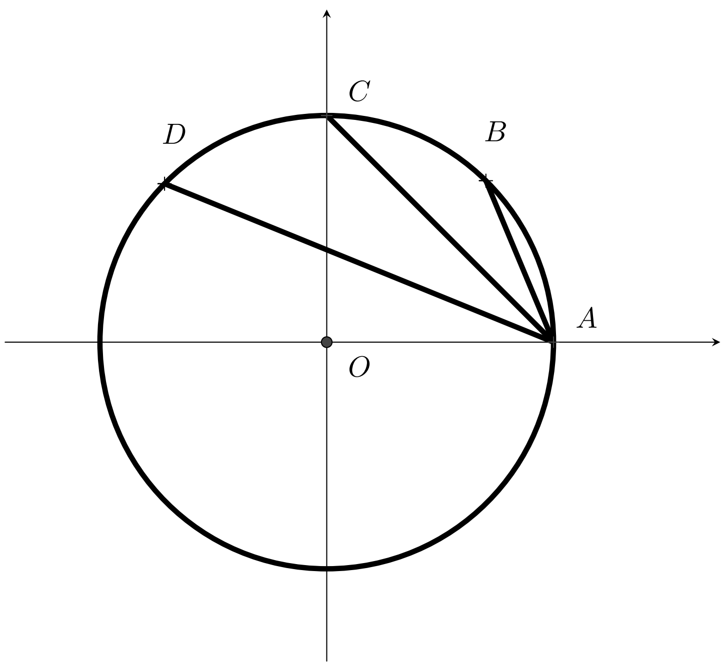
Exercice 1

1. Pour $n = 4$, on a $a_4^0 = 1, a_4^2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ et $a_4^3 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc la somme demandée est égale à $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2})$. Or
$$\frac{2}{1 - a_4} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2 - \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{4(2 - \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})^2 + 2} = \frac{4(2 - \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})}{8 - 4\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$
Et $\frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, donc $\frac{2}{1 - a} = \frac{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) + \mathrm{i}\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \mathrm{i}(\sqrt{2} + 1)$, ce qui est bien la valeur obtenue plus haut.

2. On peut bien sûr effectuer le calcul beaucoup plus rapidement en exploitant une somme géométrique : $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_n^k = \frac{1 - a_n^n}{1 - a_n}$, car $a_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Or $a_n^n = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, et la formule en découle.

3. Puisque $a_n^k = e^{\frac{ki\pi}{n}} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, les deux sommes qu'on cherche à calculer dans cette question sont la partie réelle et la partie imaginaire de la somme calculée à la question précédente.
   On écrit A_n sous forme algébrique :
$$A_n = \frac{2}{1 - e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}} - e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}\right)} = \frac{2}{-2\mathrm{i}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\mathrm{i}e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 + \frac{\mathrm{i}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$
   On en déduit donc que $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$

4. (a) $\left|a_n^k - 1\right|^2 = \left|e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1\right|^2 = \left|e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)\right|^2 = \left|2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
   Donc $\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_n^k - 1\right|^2 = 2\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2n - 2$
   (b) Pour $n = 4$, si on note A(1), B$\left(e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\right)$ C(i) et D$\left(e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}\right)$ on obtient
   $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 2 \times 4 - 2 = 6$ en appliquant le théorème de Pythagore
   En effet $AB^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$
   $AC^2 = 2$ et $AD^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}$



Exercice 2 On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ et on note A $= \mathbb{C} \setminus \{2\}$ et B $= \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Soit $z' \in B, z' = \dfrac{z+1}{z-2}, z \in A \Leftrightarrow z'(z-2) = z+1, z \in A \Leftrightarrow z(z'-1) = 2z'+1, z \in A \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{2z'+1}{z'-1}$ car $z' \in B$

   L'application f réalise une bijection de A vers B et $\begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \longrightarrow & A \\ z & \mapsto & \dfrac{2z+1}{z-1} \end{array}$

2. $z' \in \mathbb{U}, z' \neq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z-2|$ Ce qui équivaut à dire que le point $M(z)$ appartient à la médiatrice du segment $[EF]$ où $E(-1)$ et $F(2)$ qui a pour équation $x = \dfrac{1}{2}$

   On en déduit que $\boxed{f^{-1}\left(\mathbb{U} \setminus \{1\}\right) = \{z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}y, y \in \mathbb{R}\}}$

   En utilisant la même méthode on obtient $\boxed{f^{-1}\left(\mathbb{D} \setminus \{1\}\right) = \{z = x + \mathrm{i}y, x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant \frac{1}{2}\}}$

3. Les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ sont ceux appartenant à $\mathbb{U} \cap f^{-1}\left(\mathbb{U} \setminus \{1\}\right)$ i.e les nombres du cerce trigonométrique qui ont une affixe de $\dfrac{1}{2}$ qui sont $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $f(z) \neq 2 \Leftrightarrow z \neq f^{-1}(2) = 5$ donc l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$ est $\mathbb{C} \setminus \{2, 5\}$

   $f \circ f$ est également bijective, comme composée de 2 applications bijectives, de $\mathbb{C} \setminus \{2, 5\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1, -2\}$ car $f(1) = -2$

Exercice 3 On considère la fonction $\varphi : t \mapsto \arcsin(\sin(2t))$.

1. $\forall t \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(2t) \leqslant 1$ et la fonction arcsinus est définie sur $[-1, 1]$,

   donc φ est définie sur $\mathbb{R}$.

   $\forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $\sin(-2t) = -\sin(2t)$ donc

   $\varphi(-2t) = \arcsin(-\sin(2t)) = -\arcsin(\sin(2t)) = -\varphi(t)$ car la fonction arcsinus est impaire. Donc φ est impaire

   $\forall t \in \mathbb{R}, t+\pi \in \mathbb{R}$ et $\sin(2(t+\pi)) = \sin(2t)$ donc $\varphi(t+\pi) = \varphi(t)$ Donc φ est π-périodique.

2. $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)) = 2t$

   $\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ $2t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\varphi(t) = \arcsin(\sin(2t)) = \pi - 2t$, d'après le cercle trigonométrique.

Exercice 4 On considère les fonctions g et h définies par

$$g(x) = \arcsin(2x-1) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right).$$

1. $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$

   Or la fonction arcsinus est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$, donc

   $\boxed{g \text{ est définie sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1[.}$

   $g'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ avec $u = 2x-1$ et $1-u^2 = 1-(4x^2-4x+1) = 4(x-x^2)$ donc

   $g'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x(1-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

2. $h(x) = \arctan(\sqrt{v})$ avec $v = \dfrac{1-x}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La fonction arctangente est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, le fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc h est définie ssi $v \geqslant 0$ et dérivable ssi $v > 0$

   Or le signe de v est celui du polynôme du second degré $x(1-x)$ qui est positif entre ses racines 0 et 1. $\boxed{\text{Donc } h \text{ est définie sur }]0,1], \text{ dérivable sur }]0,1[.}$

   $h'(x) = \dfrac{(\sqrt{v})'}{1+v^2}$ avec $1+v^2 = 1+\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$ et $(\sqrt{v})' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$

   $v' = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $(\sqrt{v})' = -\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$ puis $h'(x) = -\dfrac{x\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2}g'(x)$

3. $\forall x \in]0,1[, h'(x) = -\dfrac{1}{2}g'(x)$, donc $h(x) = -\dfrac{1}{2}g(x) + c, c \in \mathbb{R}$ et en prenant $x = 1$, par continuité de g et h en 1, on obtient $h(1) = \arctan(0) = 0 = -\dfrac{1}{2}\arcsin(1) + c = -\dfrac{\pi}{4} + c$,

   d'où $\boxed{h(x) = g(x) + \frac{\pi}{4}, \forall x \in]0,1]}$